

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de julio de 2018

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Rango, inversa y sistema

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{37}{2} \\ 11 \end{pmatrix}.$$

a) Discusión del rango según α

Calculamos el determinante para detectar los valores en los que el rango puede ser menor que 3:

$$\det A = 14 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 5\alpha \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14(35\alpha - 20) - 210 = 490(\alpha - 1).$$

Si $\alpha \neq 1$, el determinante es no nulo y $\text{rg}(A) = 3$. Para $\alpha = 1$, el determinante vale cero, pero el menor de orden dos de las dos primeras filas y columnas es

$$\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 98 \neq 0,$$

por lo que el rango es al menos 2 y, al ser el determinante nulo, exactamente 2. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $\alpha \neq 1$ y $\text{rg}(A) = 2$ si $\alpha = 1$.

b) Inversa para $\alpha = 0$

Con $\alpha = 0$, el determinante es -490 , así que la matriz es invertible. Calculamos su matriz de cofactores y la trasponemos para obtener la adjunta:

$$C(A_0) = \begin{pmatrix} -20 & 15 & -21 \\ 40 & -30 & -56 \\ -70 & -70 & 98 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(A_0) = \begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos $A_0^{-1} = \frac{1}{\det A_0} \text{Adj}(A_0)$:

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{49} & -\frac{4}{49} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{98} & \frac{3}{49} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{70} & \frac{4}{35} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Conclusión. Para $\alpha = 0$, la inversa es la matriz anterior.

c) Sistema para $\alpha = 1$

Para decidir si el sistema es compatible, observamos que el determinante es cero y que el menor anterior vale 98, por lo que $\text{rg}(A) = 2$. La tercera fila de la matriz ampliada es $\frac{3}{14}F_1 + \frac{4}{7}F_2$, también en el término independiente, ya que $\frac{3}{14} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot \frac{37}{2} = 11$. Así, $\text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

Las dos primeras ecuaciones son $14x + 10z = 2$ y $7y + 5z = \frac{37}{2}$. Tomando $z = t$,

$$x = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}t, \quad y = \frac{37}{14} - \frac{5}{7}t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $\alpha = 1$, las soluciones son $(\frac{1}{7} - \frac{5}{7}t, \frac{37}{14} - \frac{5}{7}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 2. Continuidad, asíntotas e integral

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4}, & x \leq 2, \\ \frac{x^3 - 4x}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$

a) Continuidad en $x = 2$

El valor de la función viene dado por el primer tramo: $f(2) = 8$. Por la izquierda,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 8e^0 = 8.$$

Para el límite por la derecha factorizamos el numerador y simplificamos, válidamente para $x > 2$:

$$\frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \frac{x(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x(x + 2), \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 8.$$

Ambos límites coinciden con $f(2)$. **Conclusión.** f es continua en $x = 2$.

b) Asíntotas horizontales y verticales

Para $x \rightarrow -\infty$ usamos el primer tramo, y para $x \rightarrow +\infty$ el segundo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 8e^{2x-4} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x + 2) = +\infty.$$

Por tanto, hay asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$, pero no cuando $x \rightarrow +\infty$. No hay asíntota vertical en $x = 2$: los límites laterales son finitos e iguales a 8. En el resto de la recta no hay puntos problemáticos, pues cada tramo es continuo en su intervalo. **Conclusión.** La única asíntota horizontal es $y = 0$ en $-\infty$ y no existen asíntotas verticales.

c) Integral definida

En $[0, 2]$ se aplica el primer tramo. Una primitiva de $8e^{2x-4}$ es $4e^{2x-4}$:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 8e^{2x-4} dx = [4e^{2x-4}]_0^2 = 4 - 4e^{-4} = 4(1 - e^{-4}).$$

Conclusión. La integral vale $4(1 - e^{-4})$.

Opción A - Ejercicio 3. Vectores y paralelogramo

Sean $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y $A = (-4, 4, 7)$.

a) Vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

El producto vectorial proporciona un vector perpendicular a ambos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 5, -4), \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Para que sea unitario lo dividimos por su módulo. Su tercera coordenada es negativa, como se pide:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}} \right).$$

Conclusión. Un vector que cumple las condiciones es $\vec{w}_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2, 5, -4)$.

b) Combinación lineal ortogonal a $\vec{v}$

Buscamos $\vec{w}_2 = a\vec{u} + b\vec{v}$ y exigimos $\vec{w}_2 \cdot \vec{v} = 0$. Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$ y $\vec{v} \cdot \vec{v} = 5$,

$$(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{v} = -5a + 5b = 0 \implies b = a.$$

Tomando $a = b = 1$ obtenemos $\vec{w}_2 = \vec{u} + \vec{v} = (1, 2, 2)$, que es no nulo y ortogonal a $\vec{v}$. **Conclusión.** Podemos tomar $\vec{w}_2 = (1, 2, 2)$.

c) Vértices del paralelogramo

Los vértices opuestos O y A difieren en la diagonal $\vec{OA}$. Expresamos esta diagonal como combinación de las dos direcciones:

$$\vec{OA} = 2\vec{u} - \vec{v} = (-2, 4, 6) - (2, 0, -1) = (-4, 4, 7) = A.$$

Por tanto, los otros dos vértices se obtienen desde $O = (0, 0, 0)$ sumando $2\vec{u}$ y $-\vec{v}$:

$$O + 2\vec{u} = (-2, 4, 6), \quad O - \vec{v} = (-2, 0, 1).$$

Conclusión. Los vértices son $(0, 0, 0)$, $(-2, 4, 6)$, $(-4, 4, 7)$ y $(-2, 0, 1)$.

Opción A - Ejercicio 4. Probabilidad y test diagnóstico

Sean D el suceso «tener diabetes» y K el suceso «saber que se tiene». Los datos son

$$P(D) = 0,138, \quad P(\bar{K} | D) = 0,43,$$

por lo que $P(K | D) = 1 - 0,43 = 0,57$.

a) Diabético y consciente; no diabético o no consciente

La regla del producto para una probabilidad condicionada da

$$P(D \cap K) = P(K | D)P(D) = 0,57 \cdot 0,138 = 0,07866.$$

El suceso «no es diabético o no lo sabe» es el complementario de $D \cap K$, por las leyes de De Morgan. Luego,

$$P(\bar{D} \cup \bar{K}) = 1 - P(D \cap K) = 1 - 0,07866 = 0,92134.$$

Conclusión. Las probabilidades son 0,07866 y 0,92134, respectivamente.

b) Probabilidad de diabetes tras un resultado positivo

Aplicamos Bayes porque conocemos el resultado del test y buscamos la probabilidad de la enfermedad. Si $+$ significa resultado positivo, el teorema de la probabilidad total da

$$P(+) = P(+ | D)P(D) + P(+ | \bar{D})P(\bar{D}) = 0,96 \cdot 0,138 + 0,02 \cdot 0,862 = 0,14972.$$

Así,

$$P(D | +) = \frac{P(+ | D)P(D)}{P(+)} = \frac{0,96 \cdot 0,138}{0,14972} = \frac{3312}{3743} \approx 0,8849.$$

Conclusión. Si el test da positivo, la probabilidad de que la persona tenga diabetes es aproximadamente 0,8849 (un 88,49 %).

Opción B - Ejercicio 1. Reparto de días de viaje

Sean F , G y S los días pasados en Francia, Alemania y Suiza. Como el viaje duró 15 días y Francia se visitó el doble de días que Suiza,

$$F + G + S = 15, \quad F = 2S.$$

Los gastos diarios por persona son la suma de hotel, comida y transporte: 48 euros en Francia, 48 en Alemania y 63 en Suiza. El coste total satisface

$$48F + 48G + 63S = 765.$$

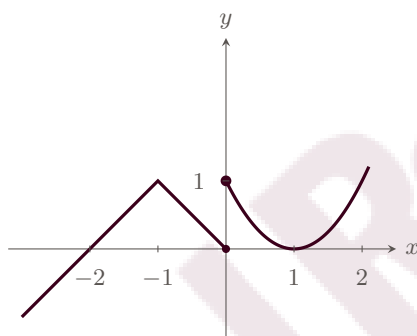
Usando $F + G + S = 15$,

$$48 \cdot 15 + 15S = 765 \implies S = 3.$$

Entonces $F = 6$ y $G = 15 - 6 - 3 = 6$. La comprobación del gasto da $48 \cdot 6 + 48 \cdot 6 + 63 \cdot 3 = 765$ euros. **Conclusión.** Estuvieron 6 días en Francia, 6 en Alemania y 3 en Suiza.

Opción B - Ejercicio 2. Lectura de una gráfica

La figura del examen muestra dos segmentos a la izquierda: $f(x) = x + 2$ entre -2 y -1 , y $f(x) = -x$ entre -1 y 0 . En $x = 0$ hay un punto lleno en $(0, 0)$ y un círculo abierto en $(0, 1)$ de la rama derecha, que es la parábola $f(x) = (x - 1)^2$ para $x > 0$. Reproducimos estas características de forma esquemática:



a) Valores de $f(-1)$ y $f'(1)$

En la gráfica, el punto de abscisa -1 tiene ordenada 1, así que $f(-1) = 1$. La rama derecha es una parábola con vértice en $(1, 0)$; la tangente en el vértice es horizontal, por lo que $f'(1) = 0$. **Conclusión.** $f(-1) = 1$ y $f'(1) = 0$.

b) Continuidad en $x = -1$ y $x = 0$

En $x = -1$, los dos segmentos se aproximan a la ordenada 1 y el valor de la función también es 1:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1).$$

Por tanto, f es continua en -1 . En $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Los límites laterales no coinciden, de modo que no existe el límite en 0 y la función no es continua allí. **Conclusión.** f es continua en -1 y discontinua en 0 .

c) Derivabilidad en $x = -1$ y $x = 0$

En el vértice de los dos segmentos, las pendientes laterales son distintas: a la izquierda la pendiente es 1 y a la derecha es -1 . Por eso, f no es derivable en -1 . En 0 ya hemos comprobado que la función no es continua; toda función derivable en un punto es continua en él, así que tampoco es derivable en 0 . **Conclusión.** f no es derivable ni en $x = -1$ ni en $x = 0$.

d) Integral entre -2 y 0

En el intervalo de integración la gráfica está sobre el eje x . Separamos en el vértice $x = -1$, donde cambia la expresión lineal:

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (x + 2) dx + \int_{-1}^0 (-x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Cada integral es el área de un triángulo de base y altura 1; ambas contribuciones son positivas. **Conclusión.** La integral vale 1.

Opción B - Ejercicio 3. Recta, plano y triángulo

La recta r pasa por $Q = (1, 0, 1)$ y tiene vector director $\vec{v} = (0, 1, 2)$, así que su forma paramétrica es

$$r: \quad x = 1, \quad y = t, \quad z = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Plano que contiene a r y a $P = (0, -1, 1)$

Tomamos el vector que une Q con P :

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (0 - 1, -1 - 0, 1 - 1) = (-1, -1, 0).$$

Un vector normal al plano se obtiene con el producto vectorial de $\vec{v}$ y $\overrightarrow{QP}$:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{QP} = (2, -2, 1).$$

Usando el punto Q en la ecuación punto-normal,

$$2(x - 1) - 2y + (z - 1) = 0 \implies 2x - 2y + z - 3 = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $2x - 2y + z - 3 = 0$.

b) Punto S para el que $\overrightarrow{SP} \perp r$

Un punto de r tiene coordenadas $S(t) = (1, t, 1 + 2t)$. La condición de perpendicularidad es que el vector $\overrightarrow{SP} = P - S(t)$ tenga producto escalar nulo con $\vec{v}$:

$$(P - S(t)) \cdot \vec{v} = (-1, -1 - t, -2t) \cdot (0, 1, 2) = -1 - 5t = 0.$$

Así, $t = -\frac{1}{5}$ y

$$S = \left(1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Conclusión. El punto buscado es $S = (1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$.

c) Área del triángulo PT_1T_2

Los puntos de r son $T(t) = (1, t, 1 + 2t)$. Para que su distancia a P sea $\sqrt{5}$, igualamos el cuadrado de la distancia a 5:

$$\|T(t) - P\|^2 = 1 + (t + 1)^2 + (2t)^2 = 5 \implies 5t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Factorizando, $(5t - 3)(t + 1) = 0$, de donde $t = \frac{3}{5}$ o $t = -1$. Por tanto,

$$T_1 = \left(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right), \quad T_2 = (1, -1, -1).$$

La base T_1T_2 está sobre r y mide $|\frac{3}{5} - (-1)| \|\vec{v}\| = \frac{8}{5}\sqrt{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. La altura es la distancia de P a r , que se obtiene desde el pie S calculado en el apartado anterior:

$$PS = \|P - S\| = \sqrt{1 + \frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Aplicando la fórmula del área de un triángulo,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} T_1T_2 \cdot PS = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{12}{5}.$$

Conclusión. El área del triángulo PT_1T_2 es $\frac{12}{5}$ unidades cuadradas.

Opción B - Ejercicio 4. Distribución normal

La variable sigue $X \sim N(\mu, \sigma) = N(8, 5, 2, 5)$. Estandarizamos mediante

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

para consultar la tabla de la normal tipificada.

a) Valor a con $P(X \leq a) = 0,05$

Buscamos el cuantil z que deja probabilidad 0,05 a la izquierda. Por simetría de la normal, corresponde a $z \approx -1,645$ (la tabla da $P(Z \leq 1,645) \approx 0,95$). Deshacemos la estandarización:

$$a = \mu + z\sigma = 8,5 - 1,645 \cdot 2,5 = 4,3875.$$

Conclusión. El valor buscado es $a \approx 4,39$.

b) Probabilidad de que $8 < X < 9,3$

Estandarizamos los extremos del intervalo:

$$z_1 = \frac{8 - 8,5}{2,5} = -0,20, \quad z_2 = \frac{9,3 - 8,5}{2,5} = 0,32.$$

Entonces,

$$P(8 < X < 9,3) = P(-0,20 < Z < 0,32) = \Phi(0,32) - \Phi(-0,20).$$

La tabla proporciona $\Phi(0,32) = 0,6255$ y $\Phi(0,20) = 0,5793$. Usando la simetría, $\Phi(-0,20) = 1 - 0,5793 = 0,4207$, así que

$$P(8 < X < 9,3) = 0,6255 - 0,4207 = 0,2048.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es 0,2048.