

CATALUÑA · PAU 2015 · ORDINARIA

Matemáticas II

12 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ (a-2)y - 3z = 0 \\ -x - y + (-a-3)z = 0 \end{cases}$$

a) 1 punto

Calcule para qué valores del parámetro a el sistema tiene más de una solución.

b) 1 punto

Resuelva el sistema para el caso $a = -3$.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -mx + 3y + z = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$, en que m es un parámetro real.

a) 1 punto

Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m .

b) 1 punto

Resuelva el sistema para $m = 1$.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Sea r la recta del espacio que tiene por ecuación $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ y sea P el punto de coordenadas $(6, 0, -1)$.

a) 1 punto

Halle la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el punto P y corta perpendicularmente la recta r .

b) 1 punto

Halle la ecuación paramétrica del plano que pasa por el punto P y contiene la recta r .

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Sea la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

a) 1 punto

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) 1 punto

Calcule las abscisas de los puntos de la gráfica en que hay un mínimo relativo, un máximo relativo o una inflexión.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) 1 punto

Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = x^3$ y la recta $y = 3x - 2$.

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Sean el punto $P = (2, 0, 2)$ y el plano π de ecuación $x - y + z = 1$.

a) 1 punto

Calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π .

b) 1 punto

Calcule la distancia del punto P al plano π .

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Considere en $\mathbb{R}^3$ la recta que tiene por ecuación $r : (x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ y los planos π_1 y π_2 de ecuaciones $\pi_1 : x + 2y + 2z = -1$ y $\pi_2 : x - 2y + 2z = -3$, respectivamente.

a) 1 punto

Determine la posición relativa de π_1 y π_2 .

b) 1 punto

Compruebe que todos los puntos de la recta r están situados a la misma distancia de los planos π_1 y π_2 .

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Sea f la función $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Calcule la primitiva de la función f que pasa por el punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (unidades en radianes).

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Calcule la matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisface $A^2 - A = I$, en que I es la matriz identidad, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) 1 punto

Calcule A^{-1} y compruebe que el resultado se corresponde con el que obtiene al deducir la matriz A^{-1} a partir de la igualdad $A^2 - A = I$.

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Sea A una matriz cuadrada que cumple que $A^3 = I$, en que I es la matriz identidad, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) 1 punto

Demuestre que la matriz A tiene inversa y que $A^{-1} = A^2$.

b) 1 punto

En el caso de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calcule si hay algún valor del parámetro a para el cual $A^3 = I$.

Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

La portada de una catedral está formada, en la parte superior, por un arco de media circunferencia que se apoya sobre dos columnas, como ilustra la figura adjunta, en que x es el diámetro de la circunferencia, es decir, la distancia entre columnas, e y es la altura de cada columna.

a) 1 punto

Compruebe que la función $f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina el área de esta portada.

b) 1 punto

Si el perímetro de la portada mide 20 m, determine las medidas x e y de la portada que maximizan su área.

Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

Sean en $\mathbb{R}^3$ el punto $P = (2, 3, 3)$ y la recta $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$.

a) 1 punto

Calcule la ecuación paramétrica del plano que pasa por el punto P y contiene la recta r .

b) 1 punto

Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r .