

Se desarrollan los tres problemas de las dos opciones para cubrir la propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Dieta de mínimo coste

Sean c y f los kilogramos de concentrado y forraje. Las cantidades mínimas de nutrientes producen las restricciones

$$300c + 400f \geq 3500, \quad 100c + 300f \geq 1500, \quad 2c + f \geq 15, \quad c, f \geq 0.$$

El coste que queremos minimizar es $K = 11c + 6,5f$. Como es lineal, comparamos los vértices de la región factible: las intersecciones factibles son $(0, 15)$, $(5, 5)$, $(9, 2)$ y $(15, 0)$. Los costes respectivos son 97,5, 87,5, 112 y 165 euros.

La combinación de coste mínimo es 5 kg de concentrado y 5 kg de forraje; cuesta 87,50 €.

Problema 2 · Ingresos de la pastelería

a) Si vende $n(p) = 2000 - 1000p$ pasteles a precio p , los ingresos semanales son precio por cantidad:

$$I(p) = p n(p) = 2000p - 1000p^2.$$

b) Como una cantidad vendida no puede ser negativa, $0 \leq p \leq 2$. La parábola es cóncava y alcanza su máximo en el vértice, o equivalentemente resolviendo $I'(p) = 2000 - 2000p = 0$. Así, $p = 1$ € y

$$I(1) = 2000 - 1000 = 1000 \text{ €}.$$

$I(p) = 2000p - 1000p^2$; $p = 1$ € maximiza los ingresos, que ascienden a 1000 €.

Problema 3 · Excursión y probabilidad condicionada

Sean P, M, G los sucesos de viajar en autobús pequeño, mediano y grande, y S el de saber esquiar. Las probabilidades de autobús son $P(P) = 1/4$, $P(M) = 1/3$ y $P(G) = 5/12$. Las probabilidades de esquiar en cada autobús son 0,8, 0,6 y 0,4. a) Sumamos los tres caminos que terminan en S :

$$P(S) = \frac{1}{4} \cdot 0,8 + \frac{1}{3} \cdot 0,6 + \frac{5}{12} \cdot 0,4 = \frac{17}{30}.$$

b) Si no sabe esquiar, Bayes da

$$P(M | \bar{S}) = \frac{P(M)P(\bar{S} | M)}{P(\bar{S})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,4}{1 - \frac{17}{30}} = \frac{4}{13}.$$

c) Si sabe esquiar, la probabilidad de viajar en un autobús grande o pequeño es la suma de esos caminos, dividida por $P(S)$:

$$P(G \cup P | S) = \frac{\frac{5}{12} \cdot 0,4 + \frac{1}{4} \cdot 0,8}{17/30} = \frac{11}{17}.$$

$$P(S) = \frac{17}{30}, \quad P(M | \bar{S}) = \frac{4}{13}, \quad P(G \cup P | S) = \frac{11}{17}.$$

Opción B

Problema 1 · Recaudación de un cine

Sean N, R, J los números de entradas normales, de día del espectador y de jubilados. Las entradas de precio reducido incluyen las dos últimas categorías, así que

$$N + R + J = 1405, \quad 6N + 4R + 3J = 7920, \quad 4R + 3J = 0,1(6N).$$

La recaudación total permite sustituir la suma reducida: $6N + 0,6N = 7920$, de donde $N = 1200$. Entonces $R + J = 205$ y $4R + 3J = 720$. Restando tres veces la primera de la segunda se obtiene $R = 105$; así, $J = 100$.

Se vendieron 1200 entradas normales, 105 de día del espectador y 100 para jubilados.

Problema 2 · Continuidad y área

a) Las ramas son continuas dentro de sus intervalos. En $x = 2$, $2/x \rightarrow 1$ y la rama siguiente vale 1; en $x = 3$, la rama central vale 1 y $-3^2 + 6 \cdot 3 - 8 = 1$; en $x = 4$, la tercera rama vale $-16 + 24 - 8 = 0$, que coincide con la última. En los extremos 1 y 5 solo se consideran límites laterales dentro del intervalo. Por ello la función es continua en todo $[1, 5]$. b) Entre 2 y 3 la función vale 1. Entre 3 y 4, $-x^2 + 6x - 8 = -(x-2)(x-4) \geq 0$, así que el área no cambia de signo y es

$$A = \int_2^3 1 \, dx + \int_3^4 (-x^2 + 6x - 8) \, dx = 1 + \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right]_3^4 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$f \text{ es continua en } [1, 5], \quad A = \frac{5}{3} \text{ unidades}^2.$$

Problema 3 · Monedas legales y trucadas

Hay 6 monedas legales equilibradas y 4 monedas con dos caras. Sea L el suceso de escoger moneda legal y C el de obtener cara. La probabilidad total de cara es

$$P(C) = P(L)P(C | L) + P(\bar{L})P(C | \bar{L}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{10} \cdot 1 = \frac{7}{10}.$$

a) Así, $P(C) = 7/10$. b) Bayes invierte la condición:

$$P(L | C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \frac{3}{7}.$$

c) Sin reemplazo, los dos órdenes incompatibles en que sale una legal y otra trucada tienen la misma probabilidad:

$$P(L, \bar{L}) + P(\bar{L}, L) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}.$$

$$P(C) = \frac{7}{10}, \quad P(L | C) = \frac{3}{7}, \quad P(\text{una legal y una trucada}) = \frac{8}{15}.$$