Exercícios de Polinômios

Questões

Questão 1: Uma empresa de tecnologia está desenvolvendo um novo software e espera que o número de vendas $V(x)$, em milhares de unidades, ao longo do tempo x em meses, siga a equação $V(x) = -2x^2 + 12x - 16$. Determine em qual mês a empresa atingirá o pico de vendas. Além disso, considere que nos meses em que a empresa não vende, ela irá à falência. Em qual mês isso ocorrerá?

Questão 2: Calcule o valor numérico do polinômio $P(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 5$ para $x = i$.

Questão 3: Dado o polinômio $P(x) = x^3 + kx^2 - 2x + 5$, determine k sabendo que $P(2) = P(0)$.

Questão 4: Determine a soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = (6x^2 - 4x + 1)^2$.

Questão 5: Determine o grau do polinômio $P(x) = (a-1)x^3 + (a+1)x^2 - ax + a$.

Questão 6: Uma criptografia usa polinômios para embaralhar mensagens. A chave de decodificação é o polinômio $P(x) = x^3 - 7x + 6$. As raízes desse polinômio são a chave para decodificar a mensagem. Encontre essas raízes, divida o polinômio e use a fatoração resultante para decodificar a mensagem.

Questão 7: Determine a, b, c, d para que sejam idênticos os polinômios $P(x) = (a+2)x^3 + (b-1)x^2 + cx + 3$ e $Q(x) = ax^2 + 2x - d + 1$.

Questão 8: Divida $P(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8$ por $x - 2$ utilizando o método de Briot-Ruffini.

Questão 9: Determine o resto da divisão de $P(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 8$ por $x + 3$.

Questão 10: Determine as condições sobre os coeficientes a e b para que o polinômio $x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4$ seja um quadrado perfeito.

Questão 11: Dado o polinômio $P(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$, onde n é um número inteiro positivo, calcule a soma dos coeficientes de $P(x)$.

Questão 12: Discuta o grau do polinômio $P(x) = (m-4)x^3 + (m^2-16)x^2 + (m+4)x + 4$ em função do parâmetro m.

Questão 13: Determine o valor de p para que o polinômio $2x^3 + 5x^2 - px + 2$ seja divisível por $x - 2$.

Questão 14: Obtenha o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x - 3$ por $2x - 1$.

Questão 15: Determine a, b, c, d, e para que o polinômio $P(x) = (a+7)x^4 - bx^3 - cx^2 - (d+2)x + e - 6$ seja identicamente nulo.

Questão 16: Determine o resto da divisão de $P(x) = x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5$ por $x^2 + x - 2$.

Questão 17: Determine a condição entre a e b para que o polinômio $x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4$ seja um quadrado perfeito.

Questão 18: Determine o resto da divisão de $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ por $x - i$.

Questão 19: Um climatologista usa o polinômio $P(x) = x^3 - 5x + 4$ para prever as temperaturas médias anuais ao longo dos próximos anos. Encontre as raízes e verifique a divisão do polinômio.

Questão 20: Um físico está analisando uma equação diferencial que modela o movimento de uma partícula em um campo de força, resultando no polinômio $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$. Ele precisa encontrar as raízes para determinar os pontos de equilíbrio da partícula.

Resoluções

Questão 1:

1. Encontre as raízes da equação $V(x) = -2x^2 + 12x - 16 = 0$ usando Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4(-2)(-16) = 144 - 128 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{-4} = \frac{-12 \pm 4}{-4}$$

   As raízes são:

$$x_1 = \frac{-12 + 4}{-4} = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-12 - 4}{-4} = 4$$

2. Calcule a média aritmética das raízes para encontrar o valor de x correspondente ao pico de vendas:

$$x_{\text{pico}} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

   Portanto, o pico de vendas ocorre no mês 3.

3. A empresa vai à falência quando $V(x) = 0$, que ocorre nas raízes $x = 2$ e $x = 4$. Assim, a empresa irá à falência nos meses 2 e 4.

Questão 2:

$$P(i) = 2i^4 - i^3 - 3i^2 + i + 5$$

$$P(i) = 2(1) - (-i) - 3(-1) + i + 5 = 2 + i + 3 + i + 5 = 10 + 2i$$

Questão 3:

$$P(2) = 8 + 4k - 4 + 5 = 9 + 4k$$

$$P(0) = 5$$

$$9 + 4k = 5 \implies 4k = -4 \implies k = -1$$

Questão 4:

$$P(x) = (6x^2 - 4x + 1)^2 = 36x^4 - 48x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$

A soma dos coeficientes é:

$$36 - 48 + 28 - 8 + 1 = 9$$

Questão 5:

- O grau do polinômio é 3 se $a \neq 1$.
- O grau do polinômio é 2 se $a = 1$ (o termo x^3 se anula).

Questão 6:

$$P(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$$

Raízes: $x = 1, 2, -3$.

Questão 7:

$$a + 2 = 0, \quad b - 1 = a, \quad c = 2, \quad 3 = -d + 1$$

Solução: $a = -2, b = -1, c = 2, d = -2$.

Questão 8:

Usando Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & -8 & 22 & -24 & 8 \\ & & 2 & -12 & 20 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 10 & -4 & 0 \end{array}$$

Quociente: $x^3 - 6x^2 + 10x - 4$.

Questão 9:

$$Resto = -37$$

Questão 10:

$$a = 4, b = 4$$

Questão 11: Para $P(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$, a soma dos coeficientes é $n + 1$.

Questão 12: O grau do polinômio $P(x) = (m-4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ depende de m:

$$\text{Grau} = 3 \text{ se } m \neq 4, \ \text{Grau} = 1 \text{ se } m = 4.$$

Questão 13: Para que $2x^3 + 5x^2 - px + 2$ seja divisível por $x - 2$:

$$p = 19$$

Questão 14: Dividindo $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x - 3$ por $2x - 1$, obtemos o quociente:

$$Q(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Resto: $-\frac{3}{2}$.

Questão 15: Para que o polinômio seja identicamente nulo:

$$a = -7, b = 0, c = 0, d = -2, e = 6$$

Questão 16: O resto da divisão de $P(x) = x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5$ por $x^2 + x - 2$ é:

$$R(x) = -6x + 13$$

Questão 17: Para que $x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4$ seja um quadrado perfeito:

$$a = 4, b = 4$$

Questão 18: O resto da divisão de $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ por $x - i$ é:

$$R = -1 + i$$

Questão 19: Para o polinômio $P(x) = x^3 - 5x + 4$:

Testando as raízes mais comuns, 1 e -1, vemos que 1 é raiz. Assim, dividindo o polinômio por $x - 1$ encontramos um polinômio do segundo grau que podemos resolver por Baskhara

Raízes:

$$x = 1, 2, -3$$

Resolução da Questão 20

Dado o polinômio $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$, vamos encontrar suas raízes para determinar os pontos de equilíbrio da partícula. Primeiramente, colocamos x em evidência, já que ele aparece em todos os termos do polinômio:

$$P(x) = x(x^4 - 5x^2 + 4)$$

Isso mostra que $x = 0$ é uma raiz do polinômio.

Agora, precisamos resolver o polinômio restante $x^4 - 5x^2 + 4$. Para simplificar, fazemos a substituição $y = x^2$, transformando o polinômio em uma equação quadrática em y:

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

Podemos resolver essa equação usando a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(4) = 25 - 16 = 9$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

As soluções para y são:

$$y_1 = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Como $y = x^2$, isso nos dá as raízes:

$$x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

Portanto, as raízes do polinômio $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ são:

$$x = 0, \pm 1, \pm 2$$