

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2020–2021 · Convocatoria extraordinaria

Se desarrollan las diez preguntas, aunque en el examen había que elegir cinco.

Bloque A

Ejercicio A.1 · Invertibilidad y ecuación matricial

La matriz es invertible cuando su determinante no es nulo. Calculamos

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix} = -a - 1.$$

Por tanto, A tiene inversa si y solo si $a \neq -1$. Para $a = 2$, resolver $AX = B$ equivale a resolver el sistema asociado:

$$\begin{cases} 2x + y + z = -2, \\ -x + 2y = 1, \\ -2y - z = -1. \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $x = 2y - 1$, y de la tercera, $z = 1 - 2y$. Al sustituir en la primera resulta $3y = -1$, de donde $y = -1/3$, $x = -5/3$ y $z = 5/3$.

$$A \text{ es invertible si } a \neq -1; \quad X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad (a = 2).$$

Ejercicio A.2 · Región factible y coste mínimo

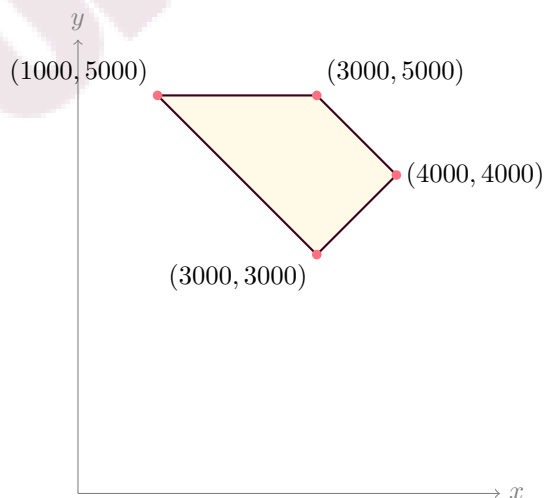
Sean x e y los metros fabricados de los cables A2020 y B2020. El coste es $C = 2x + 0,5y$. Las restricciones son

$$x + y \geq 6000, \quad y \leq 5000, \quad x + y \leq 8000, \quad y \geq x, \quad x, y \geq 0.$$

Las intersecciones de las rectas frontera que delimitan la región son

$$(1000, 5000), \quad (3000, 5000), \quad (4000, 4000), \quad (3000, 3000).$$

En efecto, corresponden, respectivamente, a $x + y = 6000$ con $y = 5000$, a $x + y = 8000$ con $y = 5000$, a $x + y = 8000$ con $y = x$ y a $x + y = 6000$ con $y = x$.



Como C es lineal, basta comparar su valor en los vértices:

(x, y)	$(1000, 5000)$	$(3000, 5000)$	$(4000, 4000)$	$(3000, 3000)$
$C = 2x + 0,5y$	4500	8500	10000	7500

Coste mínimo: 4500 euros, fabricando 1000 m de A2020 y 5000 m de B2020.

Ejercicio A.3 · Continuidad, derivabilidad y tangente

a) La única posible dificultad de continuidad está en el punto de unión $x = 3$. La rama izquierda toma allí el valor $3^2 - 3 - 1 = 5$, y el límite de la rama derecha es $3a/3 = a$. Para que coincidan debe ser $a = 5$. Con ese valor, las derivadas laterales son

$$f'_-(3) = 2(3) - 1 = 5, \quad f'_+(3) = -\frac{3a}{x^2} \Big|_{x=3} = -\frac{a}{3} = -\frac{5}{3}.$$

Como no coinciden, la función continua obtenida no es derivable en $x = 3$.

b) En $x = 1$ se usa la primera rama: $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$ y $f'(1) = 2 - 1 = 1$. La recta tangente, en forma punto-pendiente, es

$$y - (-1) = 1(x - 1),$$

por lo que $y = x - 2$.

$a = 5$ da continuidad, pero no derivabilidad en $x = 3$; $y = x - 2$.

Ejercicio A.4 · Independencia y probabilidad condicionada

Primero obtenemos la intersección a partir de la fórmula de la unión:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,8 - 0,9 = 0,4.$$

Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Como $0,4 = 0,5 \cdot 0,8$, sí son independientes. La probabilidad condicionada es

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5.$$

A y B son independientes; $P(A | B) = 0,5$.

Ejercicio A.5 · Intervalo de confianza y media muestral

a) Como se conoce $\sigma = 8$ g y la población es normal, utilizamos $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$. Para el 95%, $z_{0,975} = 1,96$; con $\bar{x} = 60$ y $n = 20$:

$$60 \pm 1,96 \frac{8}{\sqrt{20}} = 60 \pm 3,505.$$

b) La media de una muestra de tamaño 10 tiene distribución normal de media 59 y desviación típica $8/\sqrt{10}$. Tipificando los extremos:

$$P(57 \leq \bar{X} \leq 61) = P\left(-\frac{2\sqrt{10}}{8} \leq Z \leq \frac{2\sqrt{10}}{8}\right) = 2\Phi(0,79) - 1 \approx 2(0,7852) - 1 = 0,5704.$$

$IC_{95\%} \approx (56,495, 63,505)$ g; $P(57 \leq \bar{X} \leq 61) \approx 0,5704$.

Bloque B

Ejercicio B.1 · Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array} \right).$$

Su determinante es $1 - a$. Si $a \neq 1$, el rango de A es 3 y el sistema es compatible determinado por Rouché-Frobenius.

Para $a = 1$, las ecuaciones primera y tercera suman cero al usar la segunda para eliminar las variables: equivalentemente, la primera fila es la opuesta a la suma de la segunda y la tercera. La misma combinación se cumple en los términos independientes, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. Es un sistema compatible indeterminado.

Para $a = 3$, las ecuaciones segunda y tercera dan $x + 3y = -1$ y $y + z = 3$. Sustituyendo $x = -1 - 3y$ y $z = 3 - y$ en la primera se obtiene $2 + 2y = 0$, de donde $y = -1$, $x = 2$ y $z = 4$.

$a \neq 1$: SCD; $a = 1$: SCI; $(x, y, z) = (2, -1, 4)$ si $a = 3$.

Ejercicio B.2 · Dominio, asíntotas y monotonía

El denominador se anula en $x = 1$, mientras que el numerador allí vale -1 , por lo que

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Dividiendo polinomios,

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = x - \frac{x}{(x-1)^2}.$$

El segundo término tiende a cero en ambos infinitos, así que la asíntota oblicua es $y = x$.

Para estudiar la monotonía, derivamos la forma simplificada:

$$f'(x) = \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3}.$$

El polinomio $x^2 - 3x + 4$ siempre es positivo, pues su discriminante es $9 - 16 = -7 < 0$ y su coeficiente principal es positivo. Así, el signo de la derivada viene dado por el cociente $x/(x-1)^3$. Es positivo si $x < 0$ o $x > 1$, y negativo si $0 < x < 1$. Por tanto, la función crece en $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$ y decrece en $(0, 1)$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad x = 1 \text{ vertical}; \quad y = x \text{ oblicua}; \quad \text{crece en } (-\infty, 0), (1, +\infty), \text{ decrece en } (0, 1).$$

Ejercicio B.3 · Recuperación de una función y extremos

Integramos la derivada para obtener la familia de primitivas:

$$f(x) = \int (3x^2 + 8x) dx = x^3 + 4x^2 + C.$$

La condición $f(1) = 11$ determina la constante: $1 + 4 + C = 11$, luego $C = 6$.

Los extremos locales solo pueden aparecer donde $f'(x) = 0$. Factorizamos $3x^2 + 8x = x(3x + 8)$ y obtenemos $x = 0$ y $x = -8/3$. La derivada es positiva en $(-\infty, -8/3)$, negativa en $(-8/3, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$. Por el cambio de creciente a decreciente hay un máximo en $x = -8/3$, y por el cambio de decreciente a creciente, un mínimo en $x = 0$:

$$f\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{418}{27}, \quad f(0) = 6.$$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 6; \quad \text{máximo local } \left(-\frac{8}{3}, \frac{418}{27}\right); \quad \text{mínimo local } (0, 6).$$

Ejercicio B.4 · Probabilidad total y Bayes

Sean A y B los sucesos «residir en el municipio A» y «fracaso escolar». Como el número de residentes de A es doble que el de B, $P(A) = 2/3$ y $P(A^c) = 1/3$. La probabilidad total de fracaso es

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | A^c)P(A^c) = 0,02 \frac{2}{3} + 0,06 \frac{1}{3} = \frac{1}{30}.$$

Así, la probabilidad de no sufrir fracaso es $1 - P(B) = 29/30$. Para invertir la condición en el apartado b), aplicamos Bayes:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)} = \frac{0,02 \cdot (2/3)}{1/30} = 0,4.$$

$$P(\text{no fracasar}) = \frac{29}{30}; \quad P(A | \text{fracaso}) = 0,4.$$

Ejercicio B.5 · Error máximo y distribución de la media

a) Para una media con desviación típica conocida, el error máximo es $E = z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Con confianza del 95%, $z_{0,975} = 1,96$; imponemos $E < 1$:

$$\frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > (5,88)^2 = 34,5744.$$

El menor entero válido es $n = 35$.

b) Para $n = 16$, $\bar{X}$ tiene media 32 y desviación típica $3/4 = 0,75$. Entonces

$$P(\bar{X} < 30,5) = P\left(Z < \frac{30,5 - 32}{0,75}\right) = P(Z < -2) \approx 0,0228.$$

$$n_{\min} = 35; \quad P(\bar{X} < 30,5) \approx 0,0228.$$