

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2003

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Cálculo de límites

a) Cerca de 0, $\ln(\cos u) \sim -u^2/2$. Aplicamos esta equivalencia al numerador y al denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(3x)^2/2}{-(2x)^2/2} = \frac{9}{4}.$$

b) Racionalizamos el numerador multiplicando por la suma de las raíces:

$$\frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} = \frac{2x}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}.$$

Al simplificar y pasar al límite,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{8}.$$

Conclusión. Los límites son $9/4$ y $1/8$, respectivamente.

Opción A - Ejercicio 2. Discontinuidades y asíntota vertical

Factorizamos numerador y denominador:

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \frac{x^5(1 - x^3)}{(1 - x^3)(1 + x^3)} = \frac{x^5}{1 + x^3}, \quad x \neq \pm 1.$$

El dominio original excluye $x = 1$ y $x = -1$. En $x = 1$ se canceló el factor común y el límite es $1/2$, así que la discontinuidad es evitable. En $x = -1$, el numerador de la expresión simplificada tiende a -1 y el denominador a cero; por tanto, hay asíntota vertical. Como $1 + x^3$ cambia de negativo a positivo al pasar por -1 ,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

Conclusión. $x = 1$ es una discontinuidad evitable y $x = -1$ es una asíntota vertical.

Opción A - Ejercicio 3. Discusión y resolución del sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando el determinante,

$$\det A = -m(m+1).$$

Si $m \neq 0, -1$, $\det A \neq 0$, así que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3$ y, por Rouché-Frobenius, el sistema es SCD.

Para $m = 0$ y $m = -1$, el menor de las dos primeras filas y columnas x, y vale -2 y -3 , respectivamente; por ello $\operatorname{rg}(A) = 2$. En ambos casos el menor de la matriz ampliada con las columnas x, y y término independiente no se anula:

$$m = 0 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad m = -1 : \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Así, $\operatorname{rg}(A^*) = 3 > 2 = \operatorname{rg}(A)$ y el sistema es incompatible en ambos casos.

Para $m = 1$, el sistema tiene solución única. Sumando las dos últimas ecuaciones se obtiene $2x = 3$, así que $x = 3/2$. La primera ecuación da $z = 3/2$ y, al sustituir en la tercera, resulta $y = 1$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right).$$

Conclusión. Es SCD para $m \neq 0, -1$ y SI para $m = 0$ o $m = -1$; cuando $m = 1$, la solución es $(3/2, 1, 3/2)$.

Opción A - Ejercicio 4. Distancia y perpendicular común

Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (2, 1, 0) + t(3, -2, 1), \quad s : (x, y, z) = (-1, -2, 1) + u(2, -1, 2).$$

a) Para rectas alabeadas, la distancia es

$$d(r, s) = \frac{|(Q - P) \cdot (\vec{d}_r \times \vec{d}_s)|}{\|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\|},$$

donde P, Q son puntos de las rectas y $\vec{d}_r, \vec{d}_s$ sus directores. Aquí $Q - P = (-3, -3, 1)$ y $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-3, -4, 1)$; entonces

$$d(r, s) = \frac{|9 + 12 + 1|}{\sqrt{9 + 16 + 1}} = \frac{22}{\sqrt{26}} = \frac{11\sqrt{26}}{13}.$$

b) Los pies de la perpendicular común son los puntos $T \in r, U \in s$ para los que $U - T$ es perpendicular a ambos directores. Escribimos $T = P + t\vec{d}_r, U = Q + u\vec{d}_s$ y resolvemos $(U - T) \cdot \vec{d}_r = (U - T) \cdot \vec{d}_s = 0$; se obtiene $t = -4/13$ y $u = -3/13$. Por tanto, $T = (14/13, 21/13, -4/13)$ y una recta perpendicular común es

$$(x, y, z) = \left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}, -\frac{4}{13}\right) + v(-3, -4, 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La distancia entre las rectas es $11\sqrt{26}/13$ y la perpendicular común es la recta indicada.

Opción B - Ejercicio 1. Identidad de determinantes

Consideramos

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Restamos la segunda fila a la primera y a la tercera. Extraemos el factor $a - 1$ de cada una de esas filas:

$$D = (a - 1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^2 (a + 2).$$

Al desarrollar $(a - 1)^2 (a + 2) = a^3 - 3a + 2$, que coincide con la expresión del enunciado. **Conclusión.** La identidad queda comprobada: $D = a^3 - 3a + 2$.

Opción B - Ejercicio 2. Matrices que satisfacen una ecuación

La igualdad puede escribirse como

$$B \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

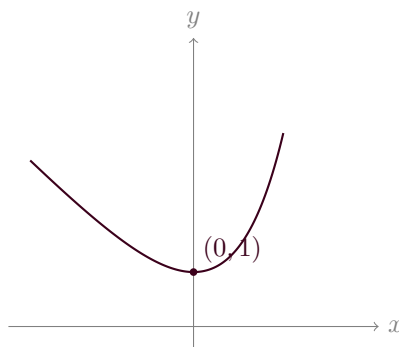
La matriz entre corchetes es $\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$. Si B no es nula, alguna de sus filas debe ser una fila no nula del núcleo izquierdo de esta matriz. Para una fila (u, v) , la condición es

$$(u, v) \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = (0, 0),$$

de donde $v = 0$ y $u(\lambda - 3) = 0$. Para que exista una solución de matriz $B \neq 0$, debe ser $\lambda = 3$; entonces todas las filas son de la forma $(u, 0)$. **Conclusión.** $\lambda = 3$ y las matrices no nulas son $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, con $(a, b) \neq (0, 0)$.

Opción B - Ejercicio 3. Estudio y gráfica de funciones

a) Para $g(x) = e^x - x$, el dominio es $\mathbb{R}$. Su derivada es $g'(x) = e^x - 1$, negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Por ello tiene mínimo absoluto $g(0) = 1$. Además, $g(x) \rightarrow +\infty$ en ambos extremos.



b) La función $f(x) = 1/(e^x - x) = 1/g(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$, pues $g(x) \geq 1$. Como g tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0^+$ en ambos sentidos.

c) Como g alcanza su mínimo absoluto 1 en 0, su recíproca positiva alcanza allí el máximo, no el mínimo. Sin embargo, $f = 1/g$ es mayor o igual que cero y tiende a cero sin alcanzarlo.

$$f'(x) = -\frac{e^x - 1}{(e^x - x)^2}, \quad f(0) = 1.$$

Conclusión. f tiene máximo absoluto 1 en $x = 0$ y no tiene mínimo absoluto; su ínfimo es 0, no alcanzado.

Opción B - Ejercicio 4. Planos perpendiculares y recta de intersección

La recta tiene punto $P = (-2, 1, 0)$ y director $\vec{d} = (6, 2, 1)$. El plano dado tiene normal $\vec{n} = (1, 3, -1)$. Para construir un plano π' que contenga la recta, su normal debe ser perpendicular a $\vec{d}$; para que sea perpendicular a π , también debe ser perpendicular a $\vec{n}$. El producto vectorial proporciona tal normal:

$$\vec{n}' = \vec{d} \times \vec{n} = (-5, 7, 16).$$

Usando el punto P , la ecuación general es

$$-5(x + 2) + 7(y - 1) + 16z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -5x + 7y + 16z - 17 = 0.$$

Para hallar la intersección con $\pi : x + 3y - z = 1$, observamos que P pertenece a ambos planos. Un vector director común es el producto vectorial de sus normales:

$$\vec{n} \times \vec{n}' = (55, -11, 22) = 11(5, -1, 2).$$

La recta de intersección, expresada paramétricamente, es

$$(x, y, z) = (-2, 1, 0) + t(5, -1, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. El plano buscado es $-5x + 7y + 16z - 17 = 0$ y la intersección tiene la forma paramétrica indicada.