Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2014–2015 · Variante 4

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Optimización de la producción

Sean x el número de tarrinas del primer tipo e y el número de tarrinas del segundo. Como cada tarrina consume distintas cantidades de chocolate, stracciatella y barquillo, las existencias imponen las restricciones

$$100x + 150y \le 8000, \qquad 200x + 150y \le 10000, \qquad x + 2y \le 100, \qquad x, y \ge 0.$$

Al dividir las dos primeras desigualdades por 50, las restricciones quedan

$$2x + 3y \le 160, \qquad 4x + 3y \le 200, \qquad x + 2y \le 100.$$

Queremos maximizar el número total de tarrinas, es decir, $T(x, y) = x + y$. En programación lineal basta comparar esta función en los vértices de la región factible. La intersección de las dos primeras rectas se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 160, \\ 4x + 3y = 200, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 20, \quad y = 40.$$

Este punto también satisface $x + 2y = 100$. Sobre los ejes, las restricciones más exigentes dan los vértices $(50, 0)$ y $(0, 50)$; junto con el origen, evaluamos:

(x, y)	$(0,0)$	$(50,0)$	$(20,40)$	$(0,50)$
$T(x,y)$	0	50	60	50

20 tarrinas del primer tipo y 40 del segundo; máximo: 60 tarrinas.

Ejercicio 2 · Derivadas y asíntotas

a) Para $f(x) = \dfrac{3\ln x}{x^3}$ el dominio es $x > 0$, porque el logaritmo solo está definido para argumentos positivos. Escribimos $f(x) = 3\ln(x)\, x^{-3}$ y aplicamos la regla del producto:

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x}\, x^{-3} + 3\ln(x)(-3x^{-4}) = \frac{3 - 9\ln x}{x^4} = \frac{3(1 - 3\ln x)}{x^4}.$$

La función $g(x) = (1 - x^2)(x^3 - 1)^2$ es un producto. Aplicando la regla del producto y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x(x^3 - 1)^2 + (1 - x^2)\, 2(x^3 - 1)\, 3x^2 \\ &= 2x(x^3 - 1)(1 + 3x - 4x^3). \end{aligned}$$

Por último, $h(x) = 3x^2 - 7x + e^{-2x}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivamos término a término; para el exponencial usamos la regla de la cadena:

$$h'(x) = 6x - 7 - 2e^{-2x} = 6x - 7 - \frac{2}{e^{2x}}.$$

b) La función $p(x) = \dfrac{7x}{3x - 12}$ no está definida cuando $3x - 12 = 0$, es decir, en $x = 4$. Como el numerador en ese punto vale $28 \neq 0$, puede haber una asíntota vertical. Los límites laterales son

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{7x}{3x - 12} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 4^+} \frac{7x}{3x - 12} = +\infty,$$

por lo que $x = 4$ es una asíntota vertical. Para estudiar el infinito, dividimos los coeficientes principales (numerador y denominador tienen el mismo grado):

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{7x}{3x - 12} = \frac{7}{3}.$$

Por tanto, $y = \frac{7}{3}$ es asíntota horizontal en ambos extremos. Al existir una asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

Vertical: $x = 4$; horizontal: $y = \dfrac{7}{3}$.

Ejercicio 3 · Probabilidad total y probabilidad condicionada

Sean H el suceso «la persona elegida es mujer» y A el suceso «aprueba». Las proporciones de hombres y mujeres son

$$P(H) = \frac{490}{700} = 0{,}7, \qquad P(H^c) = \frac{210}{700} = 0{,}3,$$

y las probabilidades de aprobar son $P(A \mid H) = 0{,}7$ y $P(A \mid H^c) = 0{,}6$.

a) Como hombre y mujer forman una partición, aplicamos la probabilidad total: sumamos las probabilidades de los dos caminos que conducen a aprobar. Las probabilidades de cada camino se obtienen multiplicando la probabilidad inicial por la condicionada:

$$P(A) = P(H)P(A \mid H) + P(H^c)P(A \mid H^c) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}67.$$

b) Ahora conocemos que la persona ha aprobado y queremos la probabilidad de que sea mujer. Usamos Bayes, dividiendo la probabilidad de ser mujer y aprobar entre la probabilidad total de aprobar:

$$P(H \mid A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}7}{0{,}67} = \frac{0{,}49}{0{,}67} = \frac{49}{67} \approx 0{,}7313.$$

$$\boxed{P(A) = 0{,}67; \qquad P(H \mid A) = \frac{49}{67}.}$$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para la media

La población sigue una distribución normal con desviación típica conocida $\sigma = 1{,}2$. La media de las diez calificaciones es

$$\bar{x} = \frac{3+8+6+3+9+1+7+7+5+6}{10} = 5{,}5.$$

Se contrasta la afirmación de que la media no supera 5 puntos. Al ser una hipótesis unilateral de cola derecha, planteamos

$$H_0 : \mu \leq 5, \qquad H_1 : \mu > 5.$$

Como σ es conocida, bajo el valor límite $\mu = 5$ el estadístico tipificado es $Z = \dfrac{\bar{X} - 5}{\sigma/\sqrt{n}}$. Para un nivel $\alpha = 0{,}05$, el valor crítico de cola derecha es $z_{0{,}95} \approx 1{,}645$; rechazaremos H_0 si

$$\frac{\bar{x} - 5}{1{,}2/\sqrt{10}} > 1{,}645 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{x} > 5 + 1{,}645\frac{1{,}2}{\sqrt{10}} \approx 5{,}624.$$

La media observada, $5{,}5$, no supera el límite crítico. Por tanto, no se rechaza H_0 al 5%.

Con un nivel de significación del 15%, el cuantil de cola derecha es $z_{0{,}85} \approx 1{,}036$. La nueva región crítica es

$$\bar{x} > 5 + 1{,}036\frac{1{,}2}{\sqrt{10}} \approx 5{,}393.$$

Como $5{,}5 > 5{,}393$, ahora sí se rechaza H_0. Al aumentar el nivel de significación, la región crítica se hace más amplia.

$$\boxed{\alpha = 5\% : \text{ no se rechaza } H_0; \qquad \alpha = 15\% : \text{ se rechaza } H_0.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Ecuaciones y dimensiones de matrices

Sean

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

a) De $X+Y=2A$ despejamos $X=2A-Y$ y lo sustituimos en $X+B=2Y$. Así,

$$2A-Y+B=2Y \quad\Longrightarrow\quad 3Y=2A+B.$$

Calculamos primero

$$2A+B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix},$$

de donde

$$Y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Con $X=2A-Y$ obtenemos

$$X=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

b) La matriz A es 2×2 y C es 3×2. En $A+D=C$, una suma con A solo puede tener dimensión 2×2, así que no existe ninguna matriz D que permita la igualdad.

Para estudiar los productos, usamos que las dimensiones interiores deben coincidir. En $A\cdot D=C^t$, la matriz A es 2×2 y el resultado C^t es 2×3; por tanto, D debe tener 2 filas y 3 columnas. La operación se puede realizar con D de dimensión 2×3.

En $D\cdot A=C$, el resultado debe tener 3 filas y 2 columnas. Como A es 2×2, D debe tener 3 filas y 2 columnas. Esta operación también se puede realizar.

Por último, $D\cdot A$ siempre tiene dos columnas, porque A tiene dos columnas, mientras que C^t tiene tres. Así que $D\cdot A=C^t$ es imposible por dimensiones.

$$X=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$A+D=C:$ imposible; $\quad AD=C^t:\ D_{2\times 3}$; $\quad DA=C:\ D_{3\times 2}$; $\quad DA=C^t:$ imposible.

Ejercicio 2 · Continuidad, monotonía y asíntotas

a) Para que f sea continua en el punto de unión $x=2$, igualamos el valor de la primera rama con el límite de la segunda:

$$f(2)=2^2+2=6,\qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{8x+a}{x-1}=\frac{16+a}{1}=16+a.$$

La continuidad requiere $16+a=6$, luego $a=-10$.

b) Con $a=-10$, en el tramo $x>2$ la función es

$$f(x)=\frac{8x-10}{x-1}.$$

Aplicando la regla del cociente,

$$f'(x)=\frac{8(x-1)-(8x-10)}{(x-1)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}.$$

En $x=3$, $f'(3)=\frac{1}{2}>0$, de modo que la función es creciente en ese tramo alrededor de $x=3$.

c) Para $x>2$ podemos reescribir la rama racional como

$$f(x)=\frac{8x-10}{x-1}=8-\frac{2}{x-1}.$$

Al tender x a $+\infty$, el segundo término tiende a cero y aparece la asíntota horizontal $y=8$. No hay asíntota vertical: el único cero del denominador de esta expresión es $x=1$, pero la rama racional solo se utiliza para $x>2$; además, en $x=2$ las dos ramas toman el valor finito 6. No hay asíntota oblicua porque existe la horizontal.

$a=-10;$ creciente en $x=3;$ asíntota horizontal: $y=8.$

Ejercicio 3 · Teorema de Bayes

Sea E el suceso «la persona tiene la enfermedad» y T el suceso «la prueba da positivo». La prevalencia es $P(E) = 1/500 = 0{,}002$, la sensibilidad es $P(T \mid E) = 0{,}90$ y la tasa de falsos positivos es $P(T \mid E^c) = 0{,}05$. Los caminos de un árbol de probabilidades se multiplican; si varios caminos incompatibles conducen al mismo resultado, sus probabilidades se suman.

a) Un diagnóstico es correcto si la persona enferma da positivo o si la persona sana da negativo. Sumamos esos dos casos:

$$\begin{aligned} P(\text{diagnóstico correcto}) &= P(E)P(T \mid E) + P(E^c)P(T^c \mid E^c) \\ &= 0{,}002 \cdot 0{,}90 + 0{,}998 \cdot 0{,}95 \\ &= 0{,}0018 + 0{,}9481 = 0{,}9499. \end{aligned}$$

b) Si la prueba ha dado positivo, la probabilidad real de enfermedad se obtiene invirtiendo la condición mediante Bayes. La probabilidad total de un positivo es

$$P(T) = P(E)P(T \mid E) + P(E^c)P(T \mid E^c) = 0{,}0018 + 0{,}0499 = 0{,}0517.$$

Por tanto,

$$P(E \mid T) = \frac{P(E)P(T \mid E)}{P(T)} = \frac{0{,}0018}{0{,}0517} = \frac{18}{517} \approx 0{,}0348.$$

La persona está sana con la probabilidad complementaria:

$$P(E^c \mid T) = 1 - P(E \mid T) = \frac{499}{517} \approx 0{,}9652.$$

$$\boxed{P(\text{diagnóstico correcto}) = 0{,}9499; \qquad P(E \mid T) = \frac{18}{517}; \qquad P(E^c \mid T) = \frac{499}{517}.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

La varianza poblacional es $0{,}25$ mm^2, luego la desviación típica conocida es $\sigma = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ mm. Para una media normal con desviación conocida, el intervalo bilateral de confianza es

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil normal que deja una probabilidad $\alpha/2$ en cada cola. Con confianza del $98\,\%$, $\alpha = 0{,}02$ y $z_{0{,}99} \approx 2{,}326$. Para $\bar{x} = 20$ y $n = 64$:

$$E = 2{,}326\frac{0{,}5}{\sqrt{64}} \approx 0{,}1454 \text{ mm},$$

así que

$$IC_{98\%} = [20 - 0{,}1454,\ 20 + 0{,}1454] = [19{,}8546,\ 20{,}1454] \text{ mm}.$$

La amplitud total del intervalo es el doble del error: $L = 2z_{0{,}99}\sigma/\sqrt{n}$. Para que sea inferior a 2 mm imponemos

$$\frac{2 \cdot 2{,}326 \cdot 0{,}5}{\sqrt{n}} < 2 \quad \Longrightarrow \quad n > \left(\frac{2 \cdot 2{,}326 \cdot 0{,}5}{2}\right)^2 \approx 1{,}353.$$

El tamaño muestral es entero, por lo que el menor que cumple la desigualdad es $n = 2$.

$$\boxed{IC_{98\%} \approx [19{,}8546, 20{,}1454] \text{ mm}; \qquad n_{\min} = 2.}$$