

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2007 · Convocatoria ordinaria

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. En el examen se eligen tres problemas de un ejercicio; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Operaciones con matrices

Calculamos por separado el producto de A por su traspuesta y la inversa. Con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = 5$, la matriz es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 5A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restamos las matrices obtenidas:

$$AA^T - 5A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$AA^T - 5A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Producción de fertilizantes

Sean x e y las toneladas de abono A y B. Las existencias de materias primas y la demanda imponen

$$0,5x + 0,8y \leq 10, \quad 0,75x + 0,4y \leq 10, \quad y \leq 3x, \quad x, y \geq 0.$$

Queremos maximizar los ingresos $I = 1000x + 1500y$. Al multiplicar por 20 las dos primeras restricciones se obtiene $10x + 16y \leq 200$ y $15x + 8y \leq 200$. Los vértices factibles son $(0, 0)$, $(\frac{40}{3}, 0)$, $(10, \frac{25}{4})$ y $(\frac{100}{29}, \frac{300}{29})$. Los dos vértices interiores se obtienen intersectando las dos restricciones de materias primas y la primera con $y = 3x$, respectivamente. Comparamos los ingresos:

(x, y)	$(0, 0)$	$(\frac{40}{3}, 0)$	$(10, \frac{25}{4})$	$(\frac{100}{29}, \frac{300}{29})$
$I (\text{€})$	0	$\frac{40000}{3}$	19375	$\frac{550000}{29}$

Fabricar 10 t de A y $\frac{25}{4}$ t de B; ingreso máximo: 19375 €.

Problema 3 · Continuidad y área

En cada tramo la función es continua, así que comprobamos los puntos de unión del intervalo $[-4, 2]$. En $x = -3$, el valor de la rama izquierda es $f(-3) = 2$, pero el límite por la derecha vale $(-3)^2 = 9$. Al no coincidir, hay una discontinuidad de salto. En $x = 1$, el límite por la izquierda es $1^2 = 1$ y la rama derecha también vale 1, por lo que la función es continua. En los extremos -4 y 2 se considera el límite lateral desde el intervalo; coincide con el valor de cada tramo. Concluimos que solo es discontinua en $x = -3$.

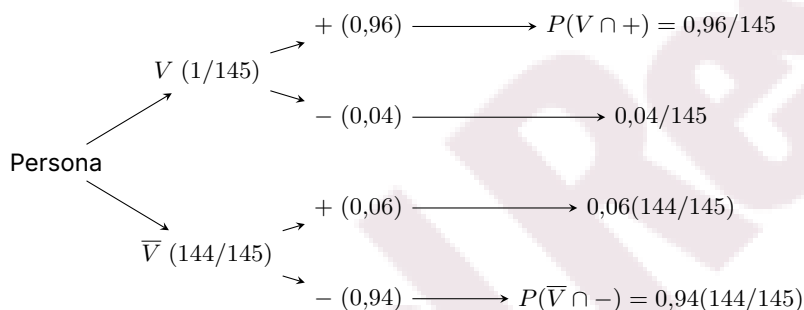
Para el área, x^2 y 1 son no negativos en los intervalos correspondientes. Dividimos la integral en el punto donde cambia la expresión:

$$A = \int_{-3}^1 x^2 dx + \int_1^2 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-3}^1 + [x]_1^2 = \frac{28}{3} + 1 = \frac{31}{3}.$$

Discontinua solo en $x = -3$; $A = \frac{31}{3}$ unidades².

Problema 4 · Test de detección

Sean V el suceso «ser portador» y $+$ el resultado positivo. Tenemos $P(V) = 1/145$, $P(+ | V) = 0,96$ y $P(- | \bar{V}) = 0,94$, luego $P(+ | \bar{V}) = 0,06$. Las probabilidades de los caminos del árbol se obtienen multiplicando las probabilidades de sus ramas:



Sumando las ramas positivas,

$$P(+) = \frac{0,96}{145} + \frac{0,06 \cdot 144}{145} = \frac{48}{725}.$$

Bayes invierte la condición del test: $P(V | +) = \frac{0,96/145}{48/725} = \frac{1}{10}$. La probabilidad de negativo y no ser portador es $0,94 \cdot 144/145 = 3384/3625$.

$$P(+) = \frac{48}{725}, \quad P(V | +) = \frac{1}{10}, \quad P(\bar{V} \cap -) = \frac{3384}{3625}.$$

Ejercicio B

Problema 1 · Venta de automóviles

Sean x, y, z las unidades vendidas de los modelos de 12000 €, 15000 € y 22000 €. Las relaciones entre cantidades y la recaudación generan

$$x = y + z, \quad z = \frac{y}{3}, \quad 12000x + 15000y + 22000z = 1625000.$$

Sustituyendo las dos primeras igualdades en la tercera:

$$12000 \left(\frac{4y}{3} \right) + 15000y + 22000 \left(\frac{y}{3} \right) = 1625000 \implies y = \frac{975}{23}.$$

Por tanto, $x = \frac{4y}{3} = \frac{1300}{23}$ y $z = \frac{y}{3} = \frac{325}{23}$. Al ser coches, las soluciones deberían ser enteras; con la recaudación impresa no lo son, así que los datos del enunciado son incompatibles con una venta de un número entero de vehículos.

$x = \frac{1300}{23}, \quad y = \frac{975}{23}, \quad z = \frac{325}{23};$ no hay una solución con cantidades enteras de coches.
--

Problema 2 · Región factible y valor mínimo

Las desigualdades son $3y - 4x - 8 \leq 0$, $y \geq -4x + 4$, $y \geq 2$ y $x \leq 1$. Equivalen a $y \leq (4x + 8)/3$ y dos cotas inferiores para y . Al intersectar las rectas frontera y conservar solo los puntos que cumplen las cuatro condiciones, obtenemos los vértices

$$\left(\frac{1}{4}, 3 \right), \quad \left(\frac{1}{2}, 2 \right), \quad (1, 2), \quad (1, 4).$$

Por ejemplo, $(\frac{1}{4}, 3)$ es la intersección de las dos rectas oblicuas y $(\frac{1}{2}, 2)$ la de $y = -4x + 4$ con $y = 2$. Evaluamos $f(x, y) = 3x - y$ en los vértices:

(x, y)	$(\frac{1}{4}, 3)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 4)$
$3x - y$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1

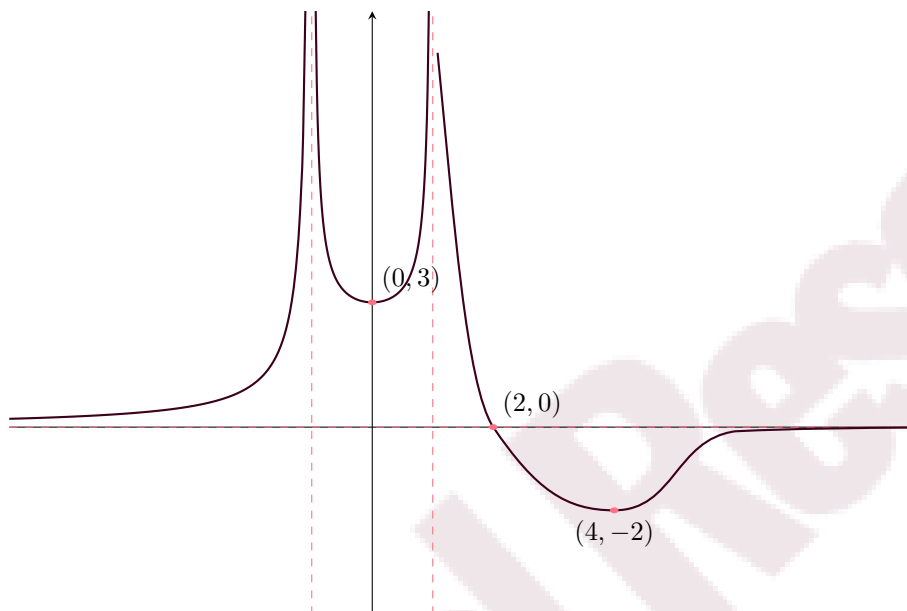
$f_{\min} = -\frac{9}{4}$ en $\left(\frac{1}{4}, 3 \right).$

Problema 3 · Gráfica a partir de sus propiedades

La función no está definida en $x = -1$ ni en $x = 1$. Según el enunciado, al acercarse a cualquiera de estas asíntotas verticales por ambos lados, $f(x) \rightarrow +\infty$. Además, se aproxima a $y = 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, corta el eje X en $(2, 0)$, es positiva para $x < 2$ y negativa para $x > 2$. Los mínimos locales son $(0, 3)$ y $(4, -2)$ y no hay máximos. Estos datos determinan la monotonía:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
Comportamiento	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

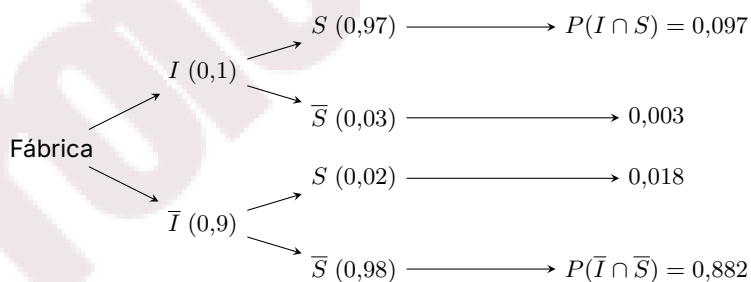
La gráfica siguiente recoge las asíntotas, los extremos y el corte dados. Para dibujar una curva compatible en cada intervalo usamos expresiones sencillas solo como guía visual:



Decrece en $(-1, 0) \cup (1, 4)$; crece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (4, \infty)$.

Problema 4 · Alarma e incidentes

Sean I el suceso «hay un incidente» y S «suena la alarma». El árbol muestra cómo combinar la probabilidad del incidente con las probabilidades condicionadas del detector:



Así, $P(S) = 0,097 + 0,018 = 0,115$ y $P(\bar{S}) = 1 - 0,115 = 0,885$. Si la alarma suena, Bayes da

$$P(\bar{I} | S) = \frac{P(\bar{I} \cap S)}{P(S)} = \frac{0,018}{0,115} = \frac{18}{115}.$$

$$P(\bar{S}) = 0,885, \quad P(\bar{I} | S) = \frac{18}{115}.$$