

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria de 2023

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta A.1 - Transporte de tierra

Sean x , y y z los números de camiones de tipo A, B y C. Si se añade un camión A, se iguala el número de camiones B y C juntos; además, la capacidad del 10 % de los camiones B es un séptimo de la capacidad total de los camiones C. El sistema es

$$\begin{cases} x + 1 = y + z, \\ 0,1 \cdot 24y = \frac{1}{7} \cdot 28z, \\ 14x + 24y + 28z = 302. \end{cases}$$

La segunda ecuación se simplifica a $3y = 5z$, y la primera da $x = y + z - 1$. De $y = \frac{5}{3}z$ resulta $x = \frac{8}{3}z - 1$. Sustituimos en la ecuación de tonelaje:

$$14\left(\frac{8}{3}z - 1\right) + 24\left(\frac{5}{3}z\right) + 28z = 302 \implies z = 3.$$

Por tanto, $y = 5$ y $x = 7$. Las toneladas transportadas por cada tipo se obtienen multiplicando el número de camiones por la capacidad de cada uno:

$$14 \cdot 7 = 98, \quad 24 \cdot 5 = 120, \quad 28 \cdot 3 = 84.$$

Conclusión. Los camiones A transportaron 98 t, los B 120 t y los C 84 t.

Pregunta A.2 - Estudio de una función

La raíz cúbica está definida para cualquier real y $(x^2 - 1)^2 \geq 0$, de modo que $D_f = \mathbb{R}$. Además, la expresión solo depende de x^2 , así que f es par.

a) Paridad

$$f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2 - 1)^2} = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = f(x).$$

Conclusión. f es una función par.

b) Derivabilidad en $x = 1$

Como $f(1) = 0$, estudiamos el cociente incremental:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{|h(2+h)|^{2/3}}{h} = \frac{|h|^{2/3}|2+h|^{2/3}}{h}.$$

Cuando $h \rightarrow 0^+$, este cociente tiende a $+\infty$, y cuando $h \rightarrow 0^-$, tiende a $-\infty$. No existe una derivada finita en $x = 1$. **Conclusión.** f no es derivable en $x = 1$.

c) Extremos relativos y absolutos

Para $x \neq \pm 1$, derivamos $f(x) = |x^2 - 1|^{2/3}$:

$$f'(x) = \frac{2}{3}|x^2 - 1|^{-1/3} \operatorname{sgn}(x^2 - 1) \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}, \quad x \neq \pm 1.$$

El signo de f' es el de $x/\sqrt[3]{x^2 - 1}$. Probamos $x = -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$, uno por intervalo; los signos son, respectivamente, $-$, $+$, $-$, $+$:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn}(f')$	$-$	$+$	$-$	$+$

Así, f decrece hasta $x = -1$, crece hasta $x = 0$, decrece hasta $x = 1$ y vuelve a crecer después. En $x = \pm 1$, donde la derivada no existe, se alcanza $f = 0$; como $f(x) \geq 0$ para todo x , son mínimos absolutos. En $x = 0$, el cambio de crecimiento a decrecimiento da un máximo relativo y $f(0) = 1$. Además, $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, por lo que no hay máximo absoluto. **Conclusión.** Hay mínimos absolutos en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y un máximo relativo en $(0, 1)$. No existe máximo absoluto.

Pregunta A.3 - Triángulo en el espacio

a) Comprobación y plano

Los vectores que parten de A son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, -1) - (1, -2, 3) = (-1, 4, -4),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 1, 0) - (1, -2, 3) = (1, 3, -3).$$

Calculamos su producto vectorial; como no es nulo, los vectores no son proporcionales y los puntos no están alineados. Por tanto, forman un triángulo. Un vector normal al plano es

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (0, -7, -7) \neq \vec{0},$$

que podemos simplificar a $(0, 1, 1)$. El plano con ese normal que pasa por $A = (1, -2, 3)$ es

$$0(x - 1) + (y + 2) + (z - 3) = 0.$$

Conclusión. El triángulo está contenido en el plano $y + z - 1 = 0$.

b) Corte de AB con $z = 1$

Expresamos la recta AB en forma paramétrica:

$$AB: \quad x = 1 - t, \quad y = -2 + 4t, \quad z = 3 - 4t.$$

En el plano $z = 1$, se cumple $3 - 4t = 1$, luego $t = \frac{1}{2}$. Sustituimos:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 0, \quad z = 1.$$

Conclusión. El corte es el punto $(\frac{1}{2}, 0, 1)$.

c) Perímetro

Calculamos las tres longitudes con la fórmula de distancia en el espacio:

$$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{33},$$

$$|AC| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{19},$$

$$|BC| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-2)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{6}.$$

El perímetro es la suma de las longitudes de los lados. **Conclusión.** El perímetro del triángulo es $\sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6}$.

Pregunta A.4 - Probabilidades

a) Probabilidad de $A \cup B$

Como A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Usamos la fórmula de la unión:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,3 + 0,5 - (0,3)(0,5) = 0,65. \end{aligned}$$

Conclusión. $P(A \cup B) = 0,65$.

b) Intersección de A y C

Por la definición de probabilidad condicionada,

$$P(C | A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}.$$

Despejamos la intersección y sustituimos:

$$P(A \cap C) = P(C | A)P(A) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15.$$

Conclusión. $P(A \cap C) = 0,15$.

c) Probabilidad de D

Aplicamos Bayes, usando $P(A | D) = P(A \cap D)/P(D)$ y $P(D | A) = P(A \cap D)/P(A)$. Primero calculamos la intersección:

$$P(A \cap D) = P(D | A)P(A) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15.$$

Entonces

$$P(A | D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = 0,2 \implies P(D) = \frac{0,15}{0,2} = 0,75.$$

Conclusión. $P(D) = 0,75$.

Pregunta B.1 - Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{array} \right).$$

El determinante identifica los posibles valores singulares:

$$\det A = 16 - (a+1)^2 = (3-a)(a+5).$$

Si $a \neq 3, -5$, entonces $\det A \neq 0$, el rango de A es 3 y coincide con el de la ampliada. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Caso $a = 3$. Las ecuaciones quedan

$$4x + 4y = 0, \quad 2y + z = 3, \quad 4x + 6y + z = 3.$$

La tercera se obtiene sumando la segunda y la primera: $(4x + 4y) + (2y + z) = 4x + 6y + z = 3$. Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, y el sistema es compatible indeterminado. Tomando $y = t$, $x = -t$ y $z = 3 - 2t$.

Caso $a = -5$. Las ecuaciones son

$$-4x + 4y = 0, \quad -6y + z = 3, \quad 4x - 10y + z = 3.$$

La tercera es la segunda menos la primera, incluidos los términos independientes, así que también $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema vuelve a ser compatible indeterminado; tomando $y = t$, se obtiene $x = t$ y $z = 3 + 6t$.

Conclusión. El sistema es SCD para $a \neq 3, -5$ y SCI para $a = 3$ o $a = -5$.

b) Solución para $a = 3$

Con $y = t$, la familia obtenida es

$$(x, y, z) = (-t, t, 3 - 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $a = 3$, todas las soluciones son $(-t, t, 3 - 2t)$.

c) Solución para $a = 5$

Sustituimos $a = 5$ en el sistema:

$$6x + 4y = 0, \quad 4y + z = 3, \quad 4x + 10y + z = 3.$$

Restar la segunda ecuación a la tercera da $4x + 6y = 0$. Junto con $6x + 4y = 0$, resulta

$$3x + 2y = 0, \quad 2x + 3y = 0.$$

El determinante de este sistema de dos ecuaciones es $9 - 4 = 5 \neq 0$, por lo que $x = y = 0$. La segunda ecuación da $z = 3$. **Conclusión.** Para $a = 5$, la solución es $(x, y, z) = (0, 0, 3)$.

Pregunta B.2 - Función a trozos

La función está definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2}, & x \leq -1, \\ \frac{2x^2}{3-3x}, & x > -1. \end{cases}$$

a) Continuidad y dominio

En el primer tramo, $2 + x^2 > 0$, así que no hay problemas de dominio. En el segundo, $3 - 3x = 0$ en $x = 1$. Por tanto, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

El único punto donde cambia la fórmula es $x = -1$. Comparamos el valor y los límites:

$$f(-1) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Luego es continua en $x = -1$. En el resto de su dominio cada expresión racional es continua. En $x = 1$ no está definida, y además

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

Conclusión. La función es continua en todo su dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; no está definida en $x = 1$.

b) Límite cuando $x \rightarrow -\infty$

Para $x \leq -1$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2} = \frac{1}{1 + 2/x^2}$. Así,

$$f(x)^{2x^2-1} = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^{-(2x^2-1)}.$$

Tomando logaritmos,

$$(2x^2 - 1) \ln f(x) = -(2x^2 - 1) \ln \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \rightarrow -4,$$

porque $\ln(1+u)/u \rightarrow 1$ cuando $u \rightarrow 0$. Exponenciando el límite,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1} = e^{-4}.$$

Conclusión. El límite es e^{-4} .

c) Integral entre -1 y 0

En este intervalo se aplica el segundo tramo, y la función es no negativa. Descomponemos la fracción para integrar:

$$\frac{2x^2}{3-3x} = \frac{2}{3} \left(-x-1 + \frac{1}{1-x}\right).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \left(-x-1 + \frac{1}{1-x}\right) dx \\ &= \frac{2}{3} \left[-\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x)\right]_{-1}^0 \\ &= \frac{2}{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Conclusión. $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{3}$.

Pregunta B.3 - Recta y plano

La recta se expresa en forma paramétrica:

$$r: \quad x = 1 + 2t, \quad y = t, \quad z = -1 - 2t.$$

Tiene punto $R = (1, 0, -1)$ y vector director $\vec{v} = (2, 1, -2)$. El plano $x - z = 2$ tiene vector normal $\vec{n} = (1, 0, -1)$.

a) Posición relativa e intersección

La dirección de la recta no es paralela al plano, porque

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (2, 1, -2) \cdot (1, 0, -1) = 4 \neq 0.$$

La recta es secante al plano. Sustituyendo sus ecuaciones paramétricas en $x - z = 2$,

$$(1 + 2t) - (-1 - 2t) = 2 \implies t = 0.$$

Conclusión. La recta corta al plano en $R = (1, 0, -1)$.

b) Proyección ortogonal de A sobre el plano

La proyección H de A sobre el plano se calcula siguiendo la normal. Para $Ax + By + Cz + D = 0$,

$$H = A - \frac{Ax_A + By_A + Cz_A + D}{A^2 + B^2 + C^2}(A, B, C).$$

Aquí el plano es $x - z - 2 = 0$, $A = (1, 1, 1)$, y el numerador es $1 - 1 - 2 = -2$; el denominador es $1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$. Entonces

$$H = (1, 1, 1) - \frac{-2}{2}(1, 0, -1) = (2, 1, 0).$$

Conclusión. La proyección ortogonal es $H = (2, 1, 0)$.

c) Simétrico de A respecto de r

Para reflejar A respecto de una recta, hallamos primero el pie H de la perpendicular desde A a r . Un punto de r es $R + t\vec{v}$; exigimos que $H - A$ sea perpendicular a $\vec{v}$:

$$H = (1 + 2t, t, -1 - 2t), \quad H - A = (2t, t - 1, -2 - 2t),$$

$$(H - A) \cdot \vec{v} = 4t + t - 1 + 4 + 4t = 9t + 3 = 0 \implies t = -\frac{1}{3}.$$

Así, $H = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Este punto es el punto medio entre A y su simétrico A' , de modo que

$$A' = 2H - A = 2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

Conclusión. El punto simétrico es $A' = (-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$.

Pregunta B.4 - Distribución normal y binomial

Sea X la longitud de una sardina, en milímetros. Según el enunciado $X \sim N(175, 25,75)$, con media 175 y desviación típica 25,75.

a) Sardinas de calidad

La longitud mínima es 16 cm, es decir, 160 mm. Tipificamos:

$$z = \frac{160 - 175}{25,75} \approx -0,58.$$

La probabilidad de superar 160 mm es

$$P(X > 160) = P(Z > -0,58) = P(Z < 0,58) = 0,7190.$$

Conclusión. Aproximadamente el 71,90 % de las sardinas supera los 16 cm.

b) Longitud t que deja un 18 % entre t y la media

Buscamos $t < 175$ con $P(t < X < 175) = 0,18$. En la normal estándar esto corresponde a un área de 0,18 entre z_t y 0:

$$P(Z < z_t) = 0,5 - 0,18 = 0,32.$$

La tabla da $P(Z < -0,47) = 1 - 0,6808 = 0,3192$, que aproxima 0,32. Por tanto,

$$t = 175 - 0,47 \cdot 25,75 = 162,8975 \text{ mm}.$$

Conclusión. Una longitud adecuada es $t \approx 162,9$ mm.

c) Lote con al menos una sardina pequeña

Una sardina pequeña mide menos de 150 mm. Tipificando,

$$p = P(X < 150) = P\left(Z < \frac{150 - 175}{25,75}\right) \approx P(Z < -0,97) = 1 - 0,8340 = 0,1660.$$

Sea Y el número de sardinas pequeñas en un lote de diez. Entonces $Y \sim \text{Binomial}(10, 0,1660)$. Conviene usar el complementario: "al menos una pequeña" es lo contrario de que las diez sean mayores o iguales a 150 mm.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 0,1660)^{10} \approx 0,8372.$$

Conclusión. La probabilidad de que un lote contenga al menos una sardina pequeña es aproximadamente 0,8372.