

El examen propone dos opciones y se debe elegir una. Para repasar todos los contenidos, resolvemos los cuatro ejercicios de ambas opciones.

Opción A - Ejercicio 1

La función es $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, cuyo dominio es $(0, +\infty)$: el logaritmo exige $x > 0$, y el denominador no se anula dentro de ese intervalo.

a) Para localizar las asíntotas verticales, estudiamos el extremo del dominio $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Por tanto, $x = 0$ es una asíntota vertical. Cuando $x \rightarrow +\infty$, aplicamos L'Hôpital al cociente $\ln x/x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Así, $y = 0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$. Al existir esta asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua en ese extremo.

b) El signo de $f'(x)$ determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Derivamos usando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Como $x^2 > 0$ en todo el dominio, el único punto crítico se obtiene de $1 - \ln x = 0$, es decir, $x = e$. Comprobamos el signo a ambos lados:

$$f'(1) = 1 > 0, \quad f'(e^2) = \frac{1 - 2}{e^4} < 0.$$

Por ello, f crece en $(0, e)$ y decrece en $(e, +\infty)$. La derivada cambia de positiva a negativa en e , de modo que allí hay un máximo relativo, cuyo valor es $f(e) = 1/e$. En conclusión,

$\text{máximo relativo en } \left(e, \frac{1}{e}\right); \quad \text{creciente en } (0, e), \quad \text{decreciente en } (e, +\infty).$

Opción A - Ejercicio 2

La tangente a $f(x) = ae^x - bx$ es horizontal en $x = 0$ cuando la derivada se anula allí. Como $f'(x) = ae^x - b$, se obtiene

$$f'(0) = a - b = 0 \implies a = b.$$

Usamos ahora la condición de la integral. Una primitiva de $ae^x - bx$ es $ae^x - \frac{b}{2}x^2$, por lo que

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[ae^x - \frac{b}{2}x^2 \right]_0^1 = a(e - 1) - \frac{b}{2} = e - \frac{3}{2}.$$

Sustituyendo $b = a$, queda $a(e - \frac{3}{2}) = e - \frac{3}{2}$. Dado que $e - \frac{3}{2} \neq 0$, resulta $a = 1$ y también $b = 1$:

$a = 1, \quad b = 1.$

Opción A - Ejercicio 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) El rango de $A - \lambda I$ es tres cuando su determinante es distinto de cero. Calculamos dicho determinante:

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 4 - \lambda & \end{vmatrix} = (2 - \lambda)((1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Si $\lambda \neq 2, 3$, el determinante no se anula y el rango es 3. Para los valores que hacen cero el determinante comprobamos el rango directamente:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la primera matriz la tercera fila es -2 veces la segunda; en la segunda, la tercera es la opuesta de la segunda. En ambos casos hay dos filas independientes, así que el rango es 2. Por tanto,

$$\text{rg}(A - \lambda I) = \begin{cases} 3, & \lambda \neq 2, 3, \\ 2, & \lambda = 2 \text{ o } \lambda = 3. \end{cases}$$

b) El sistema homogéneo $(A - 2I)X = 0$ se escribe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La primera ecuación da $y = 0$, y la segunda, $y + z = 0$, da $z = 0$. La variable x queda libre; todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (t, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

a) Escribimos la recta r en forma paramétrica. Tomando $z = t$, la condición $x + z = 1$ da $x = 1 - t$, mientras que $y = -1$:

$$r: \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -1, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{d}_r = (-1, 0, 1).$$

La otra recta ya está en forma paramétrica y tiene vector director $\vec{d}_s = (1, 0, 2)$. Estos vectores no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. Tampoco se cortan, pues todos los puntos de r tienen $y = -1$, mientras que los de s tienen $y = 2$. En consecuencia, son rectas que se cruzan.

Para hallar la perpendicular común, tomamos puntos genéricos

$$R(t) = (1 - t, -1, t), \quad S(\lambda) = (2 + \lambda, 2, 2 + 2\lambda).$$

El vector que los une es

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (1 + \lambda + t, 3, 2 + 2\lambda - t).$$

En la perpendicular común, este vector debe ser perpendicular a los directores de ambas rectas. Por tanto,

$$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_r = 1 + \lambda - 2t = 0, \quad \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_s = 5 + 5\lambda - t = 0.$$

De la primera ecuación, $t = (1 + \lambda)/2$. Al sustituir en la segunda se obtiene $\lambda = -1$, y entonces $t = 0$. Los puntos correspondientes son $R = (1, -1, 0)$ y $S = (1, 2, 0)$. Al restar sus coordenadas, $S - R = (1 - 1, 2 - (-1), 0 - 0) = (0, 3, 0)$; por eso el segmento tiene dirección $(0, 1, 0)$. Así, la perpendicular común, expresada en forma paramétrica, es

$$\ell: \begin{cases} x = 1, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

b) La distancia entre las rectas es la longitud del segmento perpendicular común RS :

$$d(r, s) = \|S - R\| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - (-1))^2 + (0 - 0)^2} = \boxed{3}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$. La tangente horizontal en $x = 1$ impone $f'(1) = 0$. Para que $(-1, 5)$ sea un punto de inflexión, debe cumplirse $f''(-1) = 0$ y, además, $f(-1) = 5$. Calculamos:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a.$$

Las tres condiciones dan el sistema

$$3 + 2a + b = 0, \quad -6 + 2a = 0, \quad -1 + a - b + c = 5.$$

De la segunda ecuación, $a = 3$; sustituyendo en la primera, $b = -9$. Finalmente, la tercera queda $11 + c = 5$, luego $c = -6$. La función es

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 6.$$

Además, $f'''(x) = 6 \neq 0$, por lo que la segunda derivada cambia de signo al pasar por $x = -1$; se confirma que el punto es de inflexión.

Opción B - Ejercicio 2

Como $m > 0$, el denominador m^3 es positivo. Los ceros de

$$f(x) = \frac{3x(2m - x)}{m^3}$$

son $x = 0$ y $x = 2m$; entre ellos la función es positiva y fuera de ese intervalo es negativa. El recinto acotado con el eje OX está, por tanto, entre esos dos ceros, y su área es la integral de f :

$$\mathcal{A} = \int_0^{2m} \frac{3x(2m - x)}{m^3} dx = \frac{1}{m^3} [3mx^2 - x^3]_0^{2m} = \frac{12m^3 - 8m^3}{m^3}.$$

Así, el área del recinto es

$$\mathcal{A} = 4m^3.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_\lambda^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda + 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda \end{array} \right).$$

a) El determinante de A_λ es

$$\det A_\lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1).$$

Si $\lambda \neq 0, 1$, el determinante es no nulo, luego $\text{rg}(A_\lambda) = 3$. Como hay tres incógnitas, Rouché-Frobenius asegura que el sistema es compatible determinado.

Para $\lambda = 0$, las ecuaciones se reducen a $x + y + z = 1$, $z = 0$ y $0 = 0$. En la matriz de coeficientes, las dos primeras filas son independientes y la tercera es nula, así que su rango es 2; en la ampliada ocurre lo mismo. Por Rouché-Frobenius, al coincidir ambos rangos y ser menores que las tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Para $\lambda = 1$, la segunda y la tercera ecuación tienen el mismo miembro izquierdo $y + z$, pero sus miembros derechos son distintos: 0 y 1. El sistema es incompatible; equivalentemente, $\text{rg}(A_1) = 2$ y $\text{rg}(A_1^*) = 3$. En resumen,

$\lambda \neq 0, 1$	SCD
$\lambda = 0$	SCI
$\lambda = 1$	SI

b) Para $\lambda = 0$, ya sabemos que $z = 0$ y $x + y = 1$. Tomando $y = t$, se obtiene la familia

$$(x, y, z) = (1 - t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Para $\lambda = 0$, todas las soluciones tienen $z = 0$, y para $\lambda = 1$ no hay soluciones. Si $\lambda \neq 0, 1$, las ecuaciones segunda y tercera implican

$$y + z = 1, \quad \lambda y + z = 0.$$

Restando, $(\lambda - 1)y = -1$, de donde $y = 1/(1 - \lambda)$ y $z = -\lambda/(1 - \lambda)$. La condición $z = 2$ conduce a

$$-\frac{\lambda}{1 - \lambda} = 2 \implies \lambda = 2.$$

Para ese valor, $y = -1$; en la primera ecuación $x + 3(-1) + 2 = 1$, así que $x = 2$. La solución pedida es

$$\lambda = 2, \quad (x, y, z) = (2, -1, 2).$$

Opción B - Ejercicio 4

a) En un rectángulo, los lados opuestos son paralelos y $\overrightarrow{CD}$ tiene la dirección de $\overrightarrow{BA}$. Calculamos $\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 1, 0) - (2, 2, 1) = (-1, -1, -1)$. Así, la recta que contiene C y D tiene vector director paralelo a $(1, 1, 1)$. Como pasa por el origen, sus ecuaciones paramétricas son

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Escribimos $C = (t, t, t)$. Los vectores de dos lados que concurren en (B) son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 1), \quad \overrightarrow{BC} = C - B = (t - 2, t - 2, t - 1).$$

Como son lados consecutivos del rectángulo, son perpendiculares. Su producto escalar debe ser cero:

$$(1, 1, 1) \cdot (t - 2, t - 2, t - 1) = 3t - 5 = 0,$$

por lo que $t = 5/3$ y $C = (5/3, 5/3, 5/3)$. El área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo generado por esos dos lados:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\|, \quad \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

El producto vectorial es

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (1, -1, 0),$$

cuya longitud es $\sqrt{2}$. Luego

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) En un paralelogramo, las diagonales tienen el mismo punto medio; de forma equivalente, $D = A + C - B$. Sustituyendo las coordenadas conocidas:

$$D = (1, 1, 0) + \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) - (2, 2, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$