

## Modelo 2 de 2002

Funciones, áreas, simetría respecto de rectas, sistemas matriciales, planos y matrices.

### Opción A - Ejercicio 1

Integramos la derivada para recuperar  $f$ :

$$f(x) = \int (2x^3 - 6x^2) dx = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + C.$$

Como  $f'(x) = 2x^2(x - 3)$ , la función decrece hasta  $x = 3$  y crece después (el punto estacionario  $x = 0$  no cambia el signo de la derivada). Su mínimo se alcanza en  $x = 3$ . La condición  $f(3) = -12$  da

$$-\frac{27}{2} + C = -12 \implies C = \frac{3}{2}, \quad \boxed{f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + \frac{3}{2}}.$$

Los puntos de inflexión se obtienen de  $f''(x) = 6x(x - 2) = 0$ ; el signo cambia en  $x = 0$  y  $x = 2$ . Las tangentes tienen ecuaciones

$$f(0) = \frac{3}{2}, \quad f'(0) = 0 \implies \boxed{y = \frac{3}{2}}, \quad f(2) = -\frac{13}{2}, \quad f'(2) = -8 \implies \boxed{y = -8x + \frac{19}{2}}.$$

### Opción A - Ejercicio 2

El valor absoluto de las expresiones  $f(x) = 4x - x^2$  si  $x \leq 4$  y  $f(x) = x^2 - 4x$  si  $x \geq 4$ . En  $x = 4$ , las derivadas laterales son  $-4$  y  $4$ , por lo que la función no es derivable en ese punto. La única región acotada entre la curva y el eje  $x$  está entre las raíces  $x = 0$  y  $x = 4$ . En ese intervalo  $f(x) \geq 0$ , así que el área es

$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[ 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}.$$

### Opción A - Ejercicio 3

El vector director de  $BC$  es  $d = C - B = (-1, -3, 1)$ . El pie  $H$  de la perpendicular desde  $A$  a la recta  $BC$  se obtiene proyectando  $A - B$  sobre  $d$ :

$$H = B + \frac{(A - B) \cdot d}{d \cdot d} d, \quad A - B = (0, -4, 2), \quad (A - B) \cdot d = 14, \quad d \cdot d = 11.$$

Por tanto,

$$H = (1, 3, 0) + \frac{14}{11}(-1, -3, 1) = \left( -\frac{3}{11}, -\frac{9}{11}, \frac{14}{11} \right).$$

El reflejo  $A'$  cumple que  $H$  es el punto medio de  $AA'$ , es decir,  $A' = 2H - A$ . Así,

$$\boxed{A' = \left( -\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11} \right)}.$$

### Opción A - Ejercicio 4

Para que un sistema cuadrado tenga infinitas soluciones, su matriz de coeficientes ha de ser singular y el sistema compatible. Los determinantes son

$$\det A = 2\alpha(\alpha + 4), \quad \det B = \alpha(2\alpha - 1).$$

Las dos matrices pueden ser singulares simultáneamente solo si  $\alpha = 0$ . Comprobamos que en ese caso ambos sistemas son compatibles y tienen rango 2. Para  $AX = b$  con  $\alpha = 0$ :

$$\begin{cases} y + z = -1, \\ -x + 3y + 2z = -5, \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases} \implies (x, y, z) = (2 - t, -1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La matriz de coeficientes tiene un menor de orden 2 no nulo y la tercera ecuación depende de las dos primeras, también en la ampliada; por tanto,  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$  y es SCl. Para  $BX = c$ :

$$\begin{cases} -x - z = -2, \\ x - y + 2z = 5, \\ 0 = 0 \end{cases} \implies (x, y, z) = (2 - t, t - 3, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

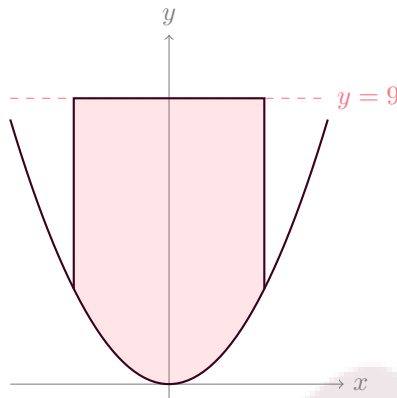
También aquí ambos rangos valen  $2 < 3$ , así que es SCl. El valor pedido es  $\boxed{\alpha = 0}$ .

### Opción B - Ejercicio 1

Sea  $x$  la semibase del rectángulo. Sus vértices inferiores están en la parábola  $y = x^2/3$ , así que la anchura es  $2x$  y la altura es  $9 - x^2/3$ . La condición de que los vértices estén dentro de la región exige  $0 \leq x \leq 3\sqrt{3}$ . El área es

$$S(x) = 2x \left( 9 - \frac{x^2}{3} \right) = 18x - \frac{2}{3}x^3.$$

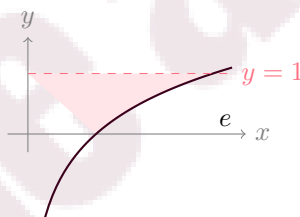
Derivando,  $S'(x) = 18 - 2x^2 = 0$  da  $x = 3$  en el dominio. Como  $S''(x) = -4x < 0$  para  $x > 0$ , se obtiene el máximo. La anchura y la altura valen ambas 6, y el área máxima es  $\boxed{36}$ .



### Opción B - Ejercicio 2

Las curvas se encuentran en  $x = 1$  cuando  $\ln x = 0$  y en  $x = e$  cuando  $\ln x = 1$ . El recinto está limitado por el eje  $x$ , la curva  $y = \ln x$  entre 1 y  $e$ , la recta  $y = 1$  y el eje  $y$ . Su área se obtiene sumando el rectángulo de base y altura 1 y la parte entre  $y = 1$  y  $y = \ln x$ :

$$S = 1 + \int_1^e (1 - \ln x) dx = 1 + [2x - x \ln x]_1^e = 1 + (e - 2) = \boxed{e - 1}.$$



### Opción B - Ejercicio 3

El vector normal de  $\pi$  es  $n = (3, -1, 2)$ . El plano paralelo que pasa por  $P = (1, -2, 2)$  tiene la misma normal; sustituyendo el punto en  $3x - y + 2z + D = 0$  resulta  $D = -9$ . Así,

$$\boxed{\pi_1 : 3x - y + 2z - 9 = 0}.$$

La recta  $r$  es la intersección de dos planos de normales  $n_1 = (1, -1, 1)$  y  $n_2 = (2, 1, -4)$ , por lo que un vector director es

$$d = n_1 \times n_2 = (3, 6, 3) \sim (1, 2, 1).$$

Un punto de  $r$  se obtiene tomando  $z = 0$ : las ecuaciones dan  $Q = (2/3, -1/3, 0)$ . Para que el segundo plano contenga  $r$ , su normal debe ser perpendicular a  $d$ ; y, para que sea perpendicular a  $\pi$ , también a  $n$ . Tomamos  $n \times d = (-5, -1, 7)$  como normal. Al usar  $Q$ :

$$-5(x - 2/3) - (y + 1/3) + 7z = 0 \implies \boxed{\pi_2 : -5x - y + 7z + 3 = 0}.$$

### Opción B - Ejercicio 4

---

La matriz  $3A$  tiene inversa cuando  $\det(3A) = 27 \det A \neq 0$ . Calculando,

$$\det A = -a^2 - 1 < 0 \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R},$$

por lo que  $3A$  es invertible para cualquier valor real de  $a$ . Para  $a = 0$ ,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La inversa de  $A_0^2$  es

$$(A_0^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

como se comprueba multiplicando esta matriz por  $A_0^2$  y obteniendo  $I$ .