

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2015--2016 · Convocatoria ordinaria

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Ecuación matricial y dimensiones

a) Como $CBX - 2AX = (CB - 2A)X$, calculamos primero las matrices que multiplican a X :

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad CB - 2A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

La ecuación queda $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} X = A^t$. Su matriz de coeficientes tiene determinante $-18 \neq 0$, por lo que es invertible. Multiplicamos por su inversa a la izquierda:

$$X = \left(\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

b) Para sumar matrices, ambas deben tener el mismo orden; para multiplicarlas, deben coincidir las dimensiones interiores. Como A es 2×2 , B es 3×2 y C es 2×3 :

- BC sí está definido y da una matriz 3×3 , pero $2A$ es 2×2 ; por ello, $BC + 2A$ no se puede realizar.
- AC está definido y es 2×3 , igual que C ; por tanto, $AC + C$ sí se puede realizar y el resultado es 2×3 .
- B^t es 2×3 . El producto $B^t C$ no está definido porque las dimensiones interiores son 3 y 2.
- CB es 2×2 y puede multiplicarse por A ; así, CBA está definido y es 2×2 .

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}; \quad BC + 2A \text{ y } B^t C \text{ no existen}; \quad AC + C \in M_{2 \times 3}, \quad CBA \in M_{2 \times 2}.$$

Ejercicio 2 · Optimización de costes

El número de bombillas debe estar en el intervalo $[1000, 6000]$. El coste es

$$C(x) = 9000 + 0,08x + \frac{2\,000\,000}{x}.$$

Para hallar el mínimo, derivamos y buscamos los puntos críticos dentro del dominio permitido:

$$C'(x) = 0,08 - \frac{2\,000\,000}{x^2} = 0 \implies x^2 = 25\,000\,000 \implies x = 5000.$$

La solución negativa se descarta porque el número de bombillas es positivo. En el intervalo dado, $C'(x) < 0$ si $1000 \leq x < 5000$ y $C'(x) > 0$ si $5000 < x \leq 6000$, luego el coste disminuye hasta 5000 bombillas y después aumenta. El mínimo se alcanza en ese punto:

$$C(5000) = 9000 + 0,08 \cdot 5000 + \frac{2\,000\,000}{5000} = 9000 + 400 + 400 = 9800 \text{ €}.$$

Producción óptima: 5000 bombillas diarias; $C_{\min} = 9800 \text{ €}$.

Ejercicio 3 · Operaciones con dos sucesos

Sean F el suceso «usa Facebook» y W el suceso «usa WhatsApp». Se conocen $P(F) = 0,60$, $P(W) = 0,80$ y $P(F \cap W^c) = 0,04$.

a) Facebook se usa solo o junto con WhatsApp, por lo que

$$P(F) = P(F \cap W) + P(F \cap W^c).$$

Así, $P(F \cap W) = 0,60 - 0,04 = 0,56$, es decir, el 56% usa ambas aplicaciones.

b) Los usuarios de WhatsApp se dividen entre quienes también usan Facebook y quienes no. Por tanto,

$$P(W \cap F^c) = P(W) - P(F \cap W) = 0,80 - 0,56 = 0,24.$$

c) La proporción que usa Facebook dentro del grupo que usa WhatsApp es una probabilidad condicionada:

$$P(F | W) = \frac{P(F \cap W)}{P(W)} = \frac{0,56}{0,80} = 0,70.$$

d) Para que los sucesos fueran independientes tendría que cumplirse $P(F \cap W) = P(F)P(W)$. Pero $0,56 \neq 0,60 \cdot 0,80 = 0,48$, así que no lo son.

$$P(F \cap W) = 0,56; \quad P(W \cap F^c) = 0,24; \quad P(F | W) = 0,70; \quad F, W \text{ no son independientes.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza y muestreo estratificado

a) En un intervalo bilateral, el centro es la media muestral y la semiamplitud es el error de estimación. A partir de $[164,86, 171,14]$ cm:

$$\bar{x} = \frac{164,86 + 171,14}{2} = 168 \text{ cm}, \quad E = 171,14 - 168 = 3,14 \text{ cm}.$$

Con confianza del 95%, $z_{0,975} \approx 1,96$ y la fórmula del error es $E = z_{0,975}\sigma/\sqrt{n}$. Por tanto,

$$3,14 \approx 1,96 \frac{8}{\sqrt{n}} \implies n \approx \left(\frac{1,96 \cdot 8}{3,14} \right)^2 \approx 25.$$

El intervalo está redondeado a centésimas; corresponde a una muestra de 25 individuos. Si queremos reducir el error a la mitad, como E es inversamente proporcional a $\sqrt{n}$, debemos multiplicar el tamaño muestral por 4: se necesitan 100 individuos.

b) En un muestreo estratificado proporcional, la razón entre el tamaño de cada estrato y el tamaño total de la población coincide con la razón entre la muestra del estrato y la muestra total. La muestra tiene $5+7+15 = 27$ usuarios y la población 243, de modo que a cada usuario de la muestra le corresponden

$$\frac{243}{27} = 9 \text{ usuarios de la población.}$$

Multiplicamos por 9 cada tamaño muestral para obtener los tamaños de los estratos:

$$N_{\text{yoga}} = 5 \cdot 9 = 45, \quad N_{\text{pilates}} = 7 \cdot 9 = 63, \quad N_{\text{mantenimiento}} = 15 \cdot 9 = 135.$$

$$\bar{x} = 168 \text{ cm}; \quad n = 25 \text{ y } n_{\text{nuevo}} = 100; \quad 45 \text{ de yoga, } 63 \text{ de pilates, } 135 \text{ de mantenimiento.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Optimización de la producción

Sean x e y los litros de colonia A y B. Las existencias de extracto de rosas y alcohol dan las restricciones

$$0,05x + 0,10y \leq 70, \quad 0,10x + 0,15y \leq 120, \quad x, y \geq 0.$$

Al multiplicar ambas desigualdades por 20, se obtiene un sistema equivalente más sencillo:

$$x + 2y \leq 1400, \quad 2x + 3y \leq 2400, \quad x, y \geq 0.$$

El importe de venta que queremos maximizar es $V(x, y) = 24x + 40y$. Los vértices factibles sobre los ejes son $(1200, 0)$ y $(0, 700)$. La intersección de las dos rectas de recursos se calcula resolviendo

$$\begin{cases} x + 2y = 1400, \\ 2x + 3y = 2400 \end{cases} \implies y = 400, \quad x = 600.$$

Comparamos el importe en los vértices:

(x, y)	$(0, 0)$	$(1200, 0)$	$(600, 400)$	$(0, 700)$
$V(x, y)$	0	28 800	30 400	28 000

$$\text{Fabricar 600 l de A y 400 l de B; } V_{\text{max}} = 30\,400 \text{ €.}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad, monotonía y máximo

Los beneficios, en miles de euros, vienen dados en $[0, 25]$ por

$$B(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < 10, \\ -\frac{1}{5}t^2 + 8t - 20, & 10 \leq t \leq 25. \end{cases}$$

El único punto de unión es $t = 10$. El límite por la izquierda vale $4 \cdot 10 = 40$ y el valor de la segunda rama es

$$B(10) = -\frac{1}{5} \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 - 20 = -20 + 80 - 20 = 40.$$

Coinciden, por lo que B es continua en $t = 10$ y, al ser polinómica en cada tramo, también en todo $[0, 25]$.

Las derivadas de las ramas son

$$B'(t) = \begin{cases} 4, & 0 < t < 10, \\ -\frac{2}{5}t + 8, & 10 < t < 25. \end{cases}$$

En el punto de unión, la derivada por la izquierda vale 4 y por la derecha $-\frac{2}{5} \cdot 10 + 8 = 4$. Como ambas coinciden y la función es continua, B es derivable en $t = 10$.

En el primer tramo la derivada es positiva. En el segundo, se anula cuando

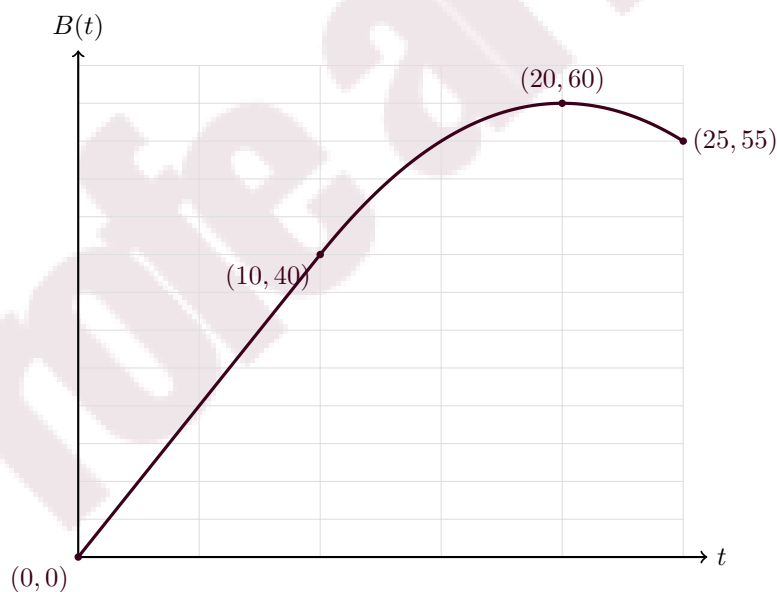
$$-\frac{2}{5}t + 8 = 0 \implies t = 20.$$

Es positiva si $10 < t < 20$ y negativa si $20 < t < 25$. Por tanto, los beneficios aumentan desde el inicio hasta el año 20 y después disminuyen. En $t = 20$ se alcanza el máximo:

$$B(20) = -\frac{1}{5} \cdot 20^2 + 8 \cdot 20 - 20 = -80 + 160 - 20 = 60.$$

El beneficio máximo es 60 miles de euros, es decir, 60 000 €.

La gráfica une la recta $B = 4t$ con la parábola cóncava hacia abajo $B = -\frac{1}{5}t^2 + 8t - 20$; ambas pasan por $(10, 40)$:



Continua y derivable en $[0, 25]$;
crece hasta $t = 20$ y decrece después;
 $B_{\max} = 60$ miles de euros en el año 20.

Ejercicio 3 · Compatibilidad, independencia y probabilidad condicionada

Se conocen $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ y $P((A \cup B)^c) = 0,1$. Primero calculamos la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 0,9.$$

a) Aplicamos la fórmula de la unión para hallar la intersección:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,9 = 0.$$

La intersección tiene probabilidad nula, luego A y B son incompatibles.

b) Para que fueran independientes debería cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$. Como la intersección vale 0, no son independientes.

c) Como $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ y los dos sucesos son incompatibles,

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4.$$

d) La probabilidad condicionada se calcula dividiendo la probabilidad de $A \cap B^c$ entre la de B^c :

$$P(A | B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0,4}{1 - 0,5} = 0,8.$$

A, B son incompatibles, pero no independientes; $P(A \cap B^c) = 0,4$; $P(A | B^c) = 0,8$.

Ejercicio 4 - Contraste unilateral para la media

La afirmación del artículo es que la media no es inferior a 40. Por ello planteamos un contraste de cola izquierda:

$$H_0 : \mu \geq 40, \quad H_1 : \mu < 40.$$

La población es normal, la desviación típica conocida es $\sigma = 2$ y $n = 100$. El error típico vale $2/\sqrt{100} = 0,2$. Para $\alpha = 0,05$, el valor crítico de cola izquierda es $z_{0,05} \approx -1,645$. La región de rechazo se obtiene de

$$\frac{\bar{x} - 40}{0,2} < -1,645 \iff \bar{x} < 40 - 1,645 \cdot 0,2 = 39,671.$$

La media observada es 38, que pertenece a la región de rechazo. Se rechaza H_0 al 5%; por tanto, los datos no permiten aceptar la afirmación del artículo y aportan evidencia de que la media es inferior a 40 mensajes diarios.

Región de rechazo: $\bar{x} < 39,671$; $\bar{x} = 38$: se rechaza H_0 .