

Se desarrollan las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio 1 · Sistemas de ecuaciones y proporcionalidad

a) Sean x, y, z los kilos de sandía rayada, negra sin pepitas y negra con pepitas, respectivamente. La capacidad semanal y la condición sobre la variedad con pepitas se expresan mediante

$$x + y + z = 2700, \quad z = \frac{x + y}{3}.$$

De aquí, $x + y = 2025$ y $z = 675$. La recaudación fija otra ecuación:

$$1,25x + 2,75y + 2,25z = 5400.$$

Al introducir $z = 675$ y $x = 2025 - y$,

$$1,25(2025 - y) + 2,75y + 2,25(675) = 5400,$$

de donde $1,5y = 1350$, así que $y = 900$ y $x = 1125$. La solución es única porque las condiciones determinan un sistema compatible determinado.

b) Si las tres variedades se venden al mismo precio p , la recaudación total impone $2700p = 5400$, luego $p = 2$ euros por kilo. La relación $z = (x + y)/3$ junto con el total vuelve a dar $z = 675$ y $x + y = 2025$. Por tanto, hay muchas cantidades posibles: por ejemplo, para cualquier $t \in [0, 2025]$ se pueden vender $x = t$, $y = 2025 - t$ y $z = 675$ kilos. La recaudación y la condición de proporción se mantienen, de modo que las cantidades no son únicas.

$$(x, y, z) = (1125, 900, 675) \text{ kg}; \quad p = 2 \text{ €/kg.}$$
$$x + y = 2025, \quad z = 675 : \text{ infinitos repartos en b).}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, integral, asíntotas y monotonía

Pregunta 2.1. Para $f(x) = (x^2 - x - a)/2$, una primitiva es

$$F(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{ax}{2}.$$

Usamos el teorema fundamental del cálculo para imponer el valor de la integral:

$$\int_2^3 f(x) dx = F(3) - F(2) = \frac{23}{12} - \frac{a}{2} = \frac{5}{12},$$

por lo que $a = 3$.

Para cualquier a , f es un polinomio dividido por 2, así que es continua en todo $\mathbb{R}$. Cuando $a = 1$, $f(2) = 1/2$ y $f'(x) = x - 1/2$, luego $f'(2) = 3/2$. La ecuación punto-pendiente de la tangente es

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x - 2), \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

En el límite, $f(x)$ crece como $x^2/2$, mientras que $5x^3$ tiene grado mayor; por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{5x^3} = 0.$$

$$a = 3; \quad f \text{ es continua en } \mathbb{R}; \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{5x^3} = 0.$$

Pregunta 2.2. El denominador se anula en $x = 1$, por lo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En ese punto el numerador vale 1 y el denominador tiende a cero por valores positivos, así que $x = 1$ es una asíntota vertical, con límite $+\infty$ por ambos lados. Para hallar la oblicua hacemos la división:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

El resto dividido por el denominador tiende a cero en $\pm\infty$; la asíntota oblicua es $y = x + 2$ y no existe horizontal. Estudiamos la derivada para determinar el crecimiento. Los puntos críticos satisfacen $f'(x) = 0$, y también separamos el punto excluido del dominio:

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \quad x = 0, 1 \text{ (fuera del dominio)}, 3.$$

El signo de f' es positivo en $(-\infty, 0)$ y $(0, 1)$, negativo en $(1, 3)$ y positivo en $(3, +\infty)$. La función, por ello, crece en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$, y decrece en $(1, 3)$. En $x = 0$ el signo no cambia, así que la función no alcanza un máximo allí; en $x = 3$ pasa de decrecer a crecer y alcanza un mínimo relativo, $f(3) = 27/4$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad x = 1 \text{ vertical}; \quad y = x + 2 \text{ oblicua}; \quad \nearrow (-\infty, 1), \searrow (1, 3), \nearrow (3, +\infty); \quad \min\left(3, \frac{27}{4}\right).$$

Bloque B

Ejercicio 3 · Distribuciones binomial y normal

Pregunta 3.1. Para estimar una proporción con valor previo $p = 0,9$ y $q = 0,1$, el error máximo al nivel de confianza del 95% se calcula con

$$E = z_{0,975} \sqrt{\frac{pq}{n}}, \quad z_{0,975} = 1,96.$$

Pedimos $E < 0,05$; al despejar n ,

$$n > \frac{1,96^2(0,9)(0,1)}{0,05^2} = 138,2976.$$

El tamaño mínimo entero es 139.

Sea X el número de pastillas que superan el control en la muestra de 140. Entonces $X \sim \text{Bin}(140, 0,9)$, con $\mu = 126$ y $\sigma = \sqrt{12,6} \approx 3,5496$. Los valores esperados de éxitos y fracasos son 126 y 14, por lo que usamos la aproximación normal. «Al menos 120» corresponde a $X \geq 120$; con la corrección de continuidad,

$$P(X \geq 120) \approx P\left(Z \geq \frac{119,5 - 126}{3,5496}\right) = P(Z \geq -1,8312) \approx 0,9665.$$

$$n_{\min} = 139; \quad P(X \geq 120) \approx 0,9665.$$

Pregunta 3.2. La media muestral observada es $\bar{x} = 17500/140 = 125$ g. Al conocer la desviación típica poblacional $\sigma = 30$ g, el intervalo del 99% se obtiene mediante

$$\bar{x} \pm z_{0,995} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad z_{0,995} \approx 2,576.$$

El margen es $2,576 \cdot 30/\sqrt{140} \approx 6,531$ g, luego

$$IC_{99\%}(\mu) = (125 - 6,531, 125 + 6,531) \approx (118,469, 131,531) \text{ g}.$$

Para $\mu = 100$ g, la media de 64 pastillas sigue $N(100, 3,75)$, pues $30/\sqrt{64} = 3,75$. Estandarizamos el umbral de 110 g:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 110) &= P\left(Z > \frac{110 - 100}{3,75}\right) \\ &= P(Z > 2,6667) \approx 0,0038. \end{aligned}$$

$$IC_{99\%}(\mu) \approx (118,469, 131,531) \text{ g}; \quad P(\bar{X} > 110) \approx 0,0038.$$

Ejercicio 4 · Probabilidad total, Bayes y sucesos

Pregunta 4.1. Sean M, H, E los sucesos de que la venta corresponda a un automóvil microhíbrido, híbrido o eléctrico enchufable, y sea G que tenga el acabado más alto. Las probabilidades de los tres tipos son 0,50, 0,35 y 0,15; el acabado alto falta con probabilidades condicionadas 0,55, 0,40 y 0,20, respectivamente. Sumamos los tres casos incompatibles:

$$P(G^c) = 0,50(0,55) + 0,35(0,40) + 0,15(0,20) = 0,445.$$

Para el apartado b), primero calculamos $P(G) = 0,50(0,45) + 0,35(0,60) + 0,15(0,80) = 0,555$. Por Bayes,

$$P(E | G) = \frac{P(G | E)P(E)}{P(G)} = \frac{0,80(0,15)}{0,555} = \frac{8}{37} \approx 0,2162.$$

$$P(G^c) = 0,445; \quad P(E | G) = \frac{8}{37} \approx 0,2162.$$

Pregunta 4.2. Como A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,25 \cdot 0,2 = 0,05$. La fórmula de la unión da

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,25 + 0,2 - 0,05 = 0,4.$$

Por De Morgan, $\overline{B \cap C}$ es el complementario de $B \cap C$, de modo que

$$P(\overline{B \cap C}) = 1 - P(B \cap C) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Para que A y C fueran independientes tendría que cumplirse $P(A \cap C) = P(A)P(C)$. Son disjuntos, luego $P(A \cap C) = 0$. Sin embargo, $P(C) \geq P(B \cap C) = 0,05$, así que $P(A)P(C) \geq 0,25 \cdot 0,05 > 0$. No son independientes.

$$P(A \cup B) = 0,4; \quad P(\overline{B \cap C}) = 0,95; \quad A \text{ y } C \text{ no son independientes.}$$