

El examen ofrece dos opciones; aquí se desarrollan los cuatro ejercicios de cada una para disponer de una colección completa de repaso.

Opción A - Ejercicio 1

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. El extremo relativo en $(0, 2)$ aporta dos condiciones: la gráfica pasa por ese punto y la derivada se anula en $x = 0$. Por tanto,

$$f(0) = 2 \implies d = 2, \quad f'(0) = 0 \implies c = 0.$$

La recta tangente en $x = 1$ es $x + y = 3$, es decir, $y = 3 - x$. Su ordenada en $x = 1$ es 2 y su pendiente es -1 , así que

$$f(1) = 2 \implies a + b + 2 = 2 \implies a + b = 0, \quad f'(1) = -1 \implies 3a + 2b = -1.$$

De $b = -a$ y $3a + 2b = -1$ obtenemos $a = -1$ y $b = 1$. Luego

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2.$$

Además, $f''(0) = 2 > 0$, por lo que el punto dado es efectivamente un mínimo relativo.

Opción A - Ejercicio 2

Tomamos el cambio sugerido $t = \sqrt[3]{x}$, de modo que $x = t^3$ y $dx = 3t^2 dt$. Los límites pasan de $x = 0, 3$ a $t = 0, \sqrt[3]{3}$. Así,

$$I = 3 \int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{t^2}{1+t} dt.$$

Dividimos t^2 entre $t + 1$ para simplificar el integrando:

$$\frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{t+1}.$$

Por tanto,

$$I = 3 \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t) \right]_0^{\sqrt[3]{3}} = \boxed{\frac{3}{2} \sqrt[3]{9} - 3 \sqrt[3]{3} + 3 \ln(1 + \sqrt[3]{3})}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Para discutir el sistema $AX = B$, calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2(m-2)(m+1).$$

Si $m \neq 2, -1$, el determinante es distinto de cero, de modo que $\text{rg}(A) = 3$. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado (SCD).

Quedan los valores que anulan el determinante. Para $m = 2$,

$$(A | B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

La tercera fila es la suma de las dos primeras y estas son independientes; la misma relación se cumple en los términos independientes. Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | B) = 2 < 3$, por lo que es SCI. Sus ecuaciones independientes dan

$$x - y + z = 1, \quad x + 2y + 2z = 1.$$

Restándolas, $3y + z = 0$. Con $y = t$, resulta $z = -3t$ y $x = 1 + 4t$; por tanto,

$$(x, y, z) = (1 + 4t, t, -3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $m = -1$, las filas de la ampliada son

$$(1, -1, 1 | 1), \quad (1, -1, -1 | 1), \quad (-1, 1, 3 | -1).$$

La tercera fila es la primera menos dos veces la segunda, también en la columna ampliada. Las dos primeras son independientes, así que los dos rangos valen $2 < 3$ y el sistema vuelve a ser SCI. De las ecuaciones se obtiene $z = 0$ y $x - y = 1$, luego

$$(x, y, z) = (1 + t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En conclusión, hay solución única si $m \neq 2, -1$ y hay infinitas soluciones para $m = 2$ o $m = -1$; no aparece ningún caso incompatible.

Opción A - Ejercicio 4

Parametrizamos r tomando $y = t$. De $y - z = 3$ resulta $z = t - 3$, y de $-x + 2y = 3$ se obtiene $x = 2t - 3$. Por tanto, la recta en forma paramétrica es $r : \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t \\ z = t - 3 \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$. Un punto es $Q = (-3, 0, -3)$ y un vector director es $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

a) Para determinar el plano que contiene a r y pasa por $A = (1, 0, 0)$, usamos los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{QA} = A - Q = (4, 0, 3)$. Un vector normal se obtiene con su producto vectorial:

$$\vec{v} \times \overrightarrow{QA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3, -2, -4).$$

Este vector es perpendicular a ambos vectores del plano. Con el punto A queda

$$3(x - 1) - 2y - 4z = 0, \quad \boxed{3x - 2y - 4z - 3 = 0}.$$

b) El plano π pasa por los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, \lambda)$. Su ecuación es

$$\pi : \quad \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0,$$

que también vale para $\lambda = 0$ (en ese caso los tres puntos determinan $z = 0$). Sustituimos en ella los puntos de r :

$$\lambda(2t - 3) + \lambda t + (t - 3) - \lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3\lambda + 1)t - (4\lambda + 3) = 0.$$

Si $\lambda \neq -\frac{1}{3}$, esta ecuación determina un único valor de t , luego la recta corta al plano en un punto. Si $\lambda = -\frac{1}{3}$, el coeficiente de t se anula pero el término independiente no; no hay intersección y r es paralela a π . La recta nunca está contenida en el plano.

Opción B - Ejercicio 1

La función es

$$f(x) = -x + \frac{4}{x^2}.$$

Como el denominador no puede ser cero, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) En $x = 0$ la función no está definida y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

por lo que $x = 0$ es asíntota vertical. Para el comportamiento en los extremos,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty,$$

así que no hay asíntota horizontal. Buscamos una posible asíntota oblicua $y = mx + n$, con

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = 0.$$

Por tanto, la asíntota oblicua en ambos extremos es $y = -x$.

b) El signo de f' indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Derivamos y localizamos los puntos críticos del dominio:

$$f'(x) = -1 - \frac{8}{x^3} = -\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}, \quad f'(x) = 0 \iff x = -2.$$

El punto $x = 0$ también separa intervalos, aunque está excluido del dominio. Como $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$, el signo de f' en cada intervalo es:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de f'	-	+	-
Comportamiento	decreciente	creciente	decreciente

En $x = -2$ la derivada cambia de negativa a positiva, así que hay un mínimo relativo. Su valor es

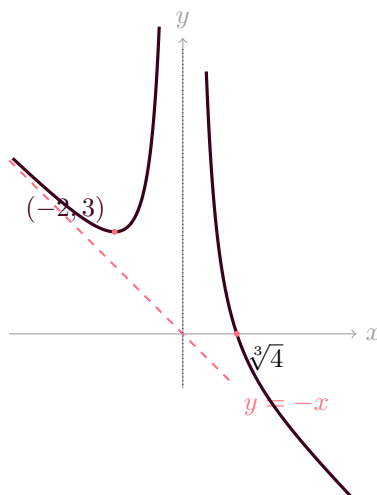
$$f(-2) = 2 + \frac{4}{4} = 3.$$

El único extremo relativo es el mínimo $(-2, 3)$.

c) Para completar el esbozo, calculamos el corte con el eje X :

$$-x + \frac{4}{x^2} = 0 \iff x^3 = 4 \implies x = \sqrt[3]{4}.$$

No hay corte con el eje Y , pues $x = 0$ no pertenece al dominio. La rama izquierda se aproxima a $y = -x$ cuando $x \rightarrow -\infty$, baja hasta $(-2, 3)$ y luego sube hacia $+\infty$ al acercarse a 0^- . La rama derecha baja desde $+\infty$ al acercarse a 0^+ , corta el eje X en $\sqrt[3]{4}$ y se aproxima a $y = -x$ cuando $x \rightarrow +\infty$.



Opción B - Ejercicio 2

Reescribimos el numerador usando $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$:

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Esta descomposición permite integrar término a término:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2} dx &= \left[x - 2 \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} \right]_0^1 \\ &= (1 - 2 \ln 2 - 1) - (-2) \\ &= \boxed{2 - 2 \ln 2}.\end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Desarrollando por la primera columna,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{vmatrix} = (m-1)(2-m) + (2-m) = m(2-m).$$

Así, A no tiene inversa cuando $\det A = 0$, es decir,

$$\boxed{m = 0 \quad \text{o} \quad m = 2}.$$

b) Para $m = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La igualdad $A^{-1}XA + I = B$ se transforma primero en $A^{-1}XA = B - I$. Multiplicando por A a la izquierda y por A^{-1} a la derecha,

$$X = A(B - I)A^{-1}.$$

Con

$$B - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

realizamos las dos multiplicaciones:

$$A(B - I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = A(B - I)A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}.$$

Opción B - Ejercicio 4

a) La recta buscada está contenida en $\pi : y = 0$, de modo que su vector director debe tener segunda componente nula. Si $\vec{d} = (a, 0, c)$, la perpendicularidad a $\vec{u} = (1, 2, 1)$ exige

$$\vec{d} \cdot \vec{u} = a + c = 0.$$

Podemos tomar $\vec{d} = (1, 0, -1)$. La recta por $P = (-1, 0, 1)$, expresada en forma paramétrica, es

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 0, \\ z = 1 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Sea π' el plano solicitado. Como π' es perpendicular a π , sus vectores normales son perpendiculares. El normal de π es $(0, 1, 0)$, así que el normal de π' tiene segunda componente cero. Además, $\vec{u}$ es un vector director de π' , por lo que el normal de este plano debe ser perpendicular a $\vec{u}$. Elegimos $\vec{n}' = (1, 0, -1)$, pues $\vec{n}' \cdot \vec{u} = 0$. Usando que P pertenece a π' , obtenemos

$$(x+1) - (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x - z + 2 = 0}.$$