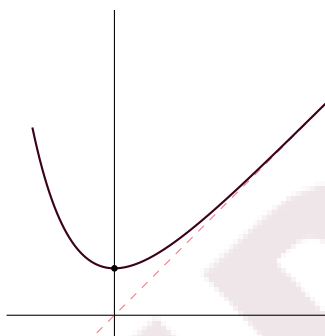


Opción A · Ejercicio 1

La derivada $f'(x) = 1 - e^{-x}$ se anula en $x = 0$; es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. La función decrece y luego crece, con mínimo relativo $(0, 1)$. Además, $f''(x) = e^{-x} > 0$ siempre, así que es convexa en todo $\mathbb{R}$ y no tiene tramos cóncavos ni puntos de inflexión. No hay asíntotas verticales. Para $x \rightarrow +\infty$, la pendiente de la asíntota oblicua es $m = \lim f(x)/x = 1$ y su ordenada es $n = \lim(f(x) - mx) = \lim e^{-x} = 0$; luego $y = x$ es asíntota oblicua. Cuando $x \rightarrow -\infty$, la exponencial crece más rápido que cualquier recta, así que no hay asíntota en ese extremo. Estos datos permiten esbozar la curva: baja desde valores grandes, alcanza $(0, 1)$ y luego crece acercándose a $y = x$ por arriba.

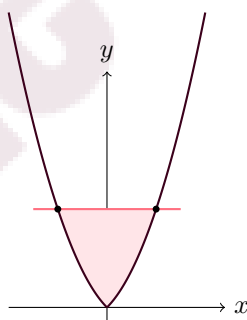


Opción A · Ejercicio 2

Por el valor absoluto,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2 + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Los cortes con $y = 2$ son $x = -1$ y $x = 1$. La función f queda debajo de la recta entre ambos cortes. Las gráficas son simétricas respecto del eje Y ; el recinto queda delimitado por ambas curvas en $[-1, 1]$:



Por simetría,

$$A = 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x) dx = \boxed{\frac{7}{3}}.$$

Opción A · Ejercicio 3

a)

$$B = A - kI = \begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{pmatrix}, \quad \det B = k^2 + 4k + 1.$$

No tiene inversa cuando $k^2 + 4k + 1 = 0$, es decir, $k = -2 \pm \sqrt{3}$.

b) Para $k = -1$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\det B = -2$. Por la fórmula de la inversa,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Al igualar $A^2 + \alpha A = \beta I$, la entrada fuera de la diagonal superior da $-4 + \alpha = 0$, luego $\alpha = 4$. Las entradas diagonales valen entonces -1 , de donde $\alpha = 4, \beta = -1$.

Opción A · Ejercicio 4

La recta r se parametriza como $(x, y, z) = (t-2, t, t+1)$ y s como $(x, y, z) = (1, u, 2u+2)$. Sus vectores directores $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 2)$ no son proporcionales. Si igualamos las primeras coordenadas, $t = 3$; entonces el punto de r tiene coordenadas $(1, 3, 4)$, que no pertenece a s , pues $2(3) - 4 = 2 \neq -2$. Por tanto, son alabeadas. El plano que contiene a s y es paralelo a r tiene como vectores directores $(0, 1, 2)$ y $(1, 1, 1)$; un normal es $(1, -2, 1)$. Usando el punto $(1, 0, 2)$ de s :

$$x - 2y + z - 3 = 0.$$

Opción B · Ejercicio 1

Si la base es b y la altura $20 - b$, el área es $A(b) = \frac{1}{2}b(20 - b)$. Es una parábola cóncava; su máximo está en el vértice, $b = 10$. La base que maximiza el área es 10 cm y el área máxima vale 50 cm^2 .

Opción B · Ejercicio 2

Los cortes de $y = x^2$ con $y = a$ son $x = \pm\sqrt{a}$ y con $y = 4$, $x = \pm 2$. En cada altura y , el ancho del recinto es $2\sqrt{y}$, de modo que

$$A = \int_a^4 2\sqrt{y} dy = \frac{4}{3}(8 - a^{3/2}).$$

Al imponer $A = 28/3$, resulta $a^{3/2} = 1$. Como $a > 0$, $a = 1$.

Opción B · Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} m+1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

La tercera fila de A es $(m+1)$ veces la primera menos la segunda, así que $\text{rg } A = 2$. Para que la ampliada conserve ese rango, los términos independientes deben satisfacer la misma relación:

$$m = (m+1)^2 - 1 \iff m(m+1) = 0.$$

El sistema es compatible solo para $m = 0$ o $m = -1$; en ambos casos los rangos son $2 < 3$ y es SCl. Para $m = 0$, las soluciones son $(1-t, t, t)$. Para $m = -1$, $x + y = 0$ y $x - y + z = 1$, por lo que

$$(x, y, z) = (t, -t, 1-2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B · Ejercicio 4

Los normales de los dos planos que definen r son $(1, 1, 2)$ y $(1, -2, -4)$; su producto vectorial da una dirección $d = (0, 2, -1)$. Tomando $R = (1, 0, 0) \in r$, el plano por $P = (2, 3, -1)$ y que contiene a r se obtiene con el normal $d \times (P - R) = (1, -1, -2)$:

$$x - y - 2z - 1 = 0.$$

El punto de r más cercano a P es su proyección ortogonal. Escribiendo $H = R + td$, imponemos $(P - H) \cdot d = 0$:

$$t = \frac{(P - R) \cdot d}{d \cdot d} = \frac{7}{5}, \quad H = \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right).$$