

# Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

## Junio de 2023 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven los seis problemas para ofrecer una propuesta completa.

### Problema 1 · Dieta para un perro

Sean  $x$  e  $y$  las latas diarias de las marcas A y B. Las cantidades mínimas de nutrientes dan las restricciones. Como las latas se cuentan con enteros, buscamos  $x, y \in \mathbb{N}_0$ . Para localizar el mínimo, primero permitimos valores reales; si el vértice óptimo es entero, también resuelve el problema original:

$$4x + 2y \geq 8, \quad 6x + 20y \geq 46, \quad x + 12y \geq 12, \quad x, y \in \mathbb{N}_0.$$

El precio que queremos minimizar es  $C(x, y) = 10x + 16y$ . En una región poligonal, el mínimo de una función lineal se alcanza en un vértice. El cruce de las dos primeras rectas es

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x + 10y = 23 \end{cases} \implies (x, y) = (1, 2),$$

y cumple la tercera restricción, pues  $1 + 12(2) = 25 \geq 12$ . El cruce entre las restricciones de proteínas y grasas es  $(6, 1/2)$ ; el otro cruce es  $(36/23, 20/23)$  y no cumple la restricción de proteínas. Los extremos factibles sobre los ejes son  $(12, 0)$  y  $(0, 4)$ . Comparamos:

$$C(1, 2) = 42, \quad C(6, \frac{1}{2}) = 68, \quad C(0, 4) = 64, \quad C(12, 0) = 120.$$

Una lata A y dos latas B;  $C_{\min} = 42$  € diarios.

### Problema 2 · Matriz normal y ecuación matricial

La matriz del apartado a) es  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ . Para que sea normal debe cumplir  $M^T M = M M^T$ . Al comparar las entradas fuera de la diagonal,

$$(M^T M)_{12} = 2 - x, \quad (M M^T)_{12} = x - 2, \quad \implies 2 - x = x - 2 \quad \implies x = 2.$$

Con este valor, las entradas diagonales también coinciden.

En el apartado b),

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Reordenamos  $AX = B^T X - C$  para dejar  $X$  multiplicada por una única matriz:

$$(A - B^T)X = -C, \quad A - B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(A - B^T) = 1.$$

Como la matriz es invertible,

$$X = -(A - B^T)^{-1}C = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$x = 2; \quad X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

### Problema 3 · Estudio de una función racional

La función es

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2}.$$

a) El denominador factoriza como  $(2x+1)(x-2)$ ; esos puntos se excluyen del dominio. El numerador factoriza como  $(x+5)(x-3)$ , así que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 2\}, \quad \text{cortes con } X = (-5, 0), (3, 0), \quad f(0) = \frac{15}{2}.$$

b) El numerador no se anula en los puntos excluidos, por lo que  $x = -1/2$  y  $x = 2$  son asíntotas verticales. Como los grados coinciden, la asíntota horizontal es  $y = 1/2$ .

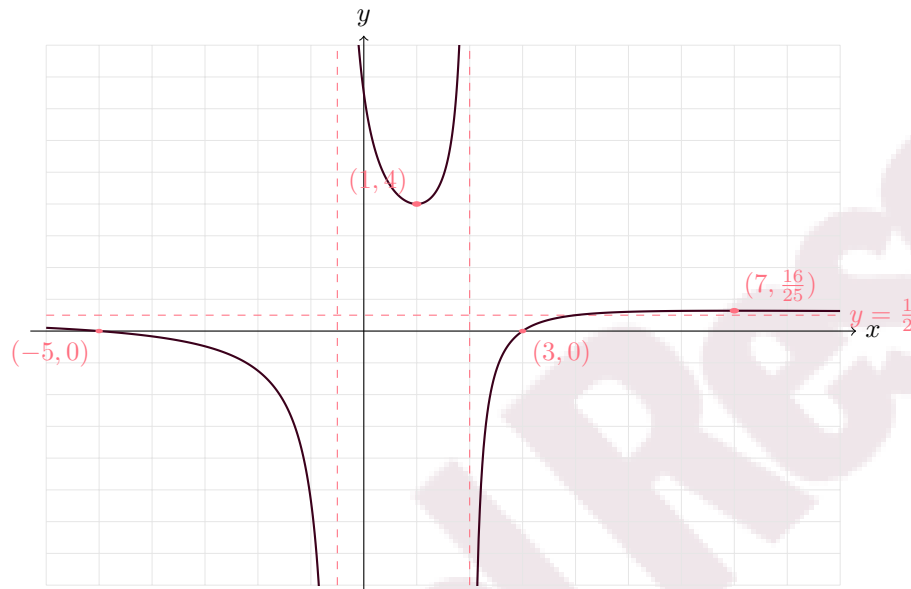
c) y d) Derivamos para estudiar el signo:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(2x^2-3x-2) - (x^2+2x-15)(4x-3)}{(2x^2-3x-2)^2} = \frac{-7(x-1)(x-7)}{(2x^2-3x-2)^2}.$$

El denominador es positivo. Los puntos críticos 1 y 7, junto con las asíntotas, dividen el dominio en intervalos. El signo de  $f'$  es negativo antes de 1, positivo entre 1 y 7, y negativo después de 7 (separando en las asíntotas). Por tanto, hay un mínimo local en  $x = 1$  y un máximo local en  $x = 7$ :

$$f(1) = 4, \quad f(7) = \frac{16}{25}.$$

e) Dibujamos la curva con los cortes, las asíntotas y los extremos:



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 2\}; \quad y = \frac{1}{2}; \quad \min_{\text{loc}} f = (1, 4), \quad \max_{\text{loc}} f = (7, \frac{16}{25}).$$

#### Problema 4 · Recibo eléctrico por tramos

Hay una cuota fija de 1200 €. Si  $x$  es el consumo en kWh, el recibo mensual es

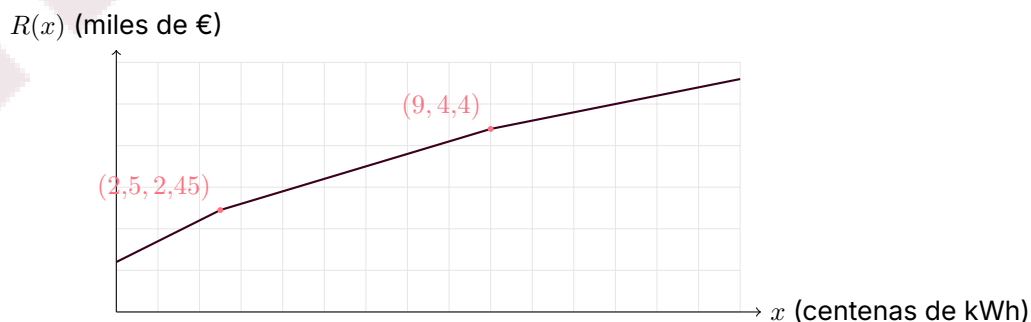
$$R(x) = \begin{cases} 1200 + 5x, & 0 \leq x \leq 250, \\ 1700 + 3x, & 250 < x \leq 900, \\ 2600 + 2x, & x > 900. \end{cases}$$

Las expresiones se obtienen sumando la cuota fija y el coste de cada tramo; en los dos últimos se conserva el coste acumulado de los tramos anteriores.

a) Para 400 kWh se usa el segundo tramo:

$$R(400) = 1700 + 3(400) = 2900 \text{ €}.$$

b) La gráfica está formada por segmentos con pendientes 5, 3 y 2, y las fórmulas coinciden en los cambios de tramo ( $R(250) = 2450$  y  $R(900) = 4400$ ):



c) La otra empresa cobra  $S(x) = 1200 + 3x$ . Igualamos los recibos en cada tramo de  $R$ :

$$1200 + 5x = 1200 + 3x \implies x = 0; \quad 1700 + 3x = 1200 + 3x \implies \text{no hay solución};$$

$$2600 + 2x = 1200 + 3x \implies x = 1400 \text{ kWh},$$

que pertenece al tercer tramo. Por tanto, coinciden si no se consume energía ( $x = 0$ , recibo 1200 €) o si se consumen 1400 kWh (recibo 5400 €).

$$R(400) = 2900 \text{ €}; \quad (x, R) = (0, 1200) \text{ o } (1400, 5400), \quad \text{en euros y kWh.}$$

### Problema 5 · Alarma de un banco

Sean  $H$  el suceso «Arsenio Lupin atraca el banco» y  $S$  «suena la alarma». Se conoce  $P(H) = 0,1$ ,  $P(S | H) = 0,95$  y  $P(S | H^c) = 0,3$ .

a) La probabilidad de atraco y silencio se obtiene multiplicando las probabilidades sucesivas de esa rama:

$$P(H \cap S^c) = P(H)P(S^c | H) = 0,1(0,05) = 0,005.$$

b) Por Bayes, la probabilidad de que no haya atraco sabiendo que sonó la alarma es

$$P(H^c | S) = \frac{P(H^c)P(S | H^c)}{P(H)P(S | H) + P(H^c)P(S | H^c)} = \frac{0,9(0,3)}{0,1(0,95) + 0,9(0,3)} = \frac{54}{73}.$$

c) Si la alarma no suena,

$$P(H | S^c) = \frac{P(H)P(S^c | H)}{P(H)P(S^c | H) + P(H^c)P(S^c | H^c)} = \frac{0,1(0,05)}{0,1(0,05) + 0,9(0,7)} = \frac{1}{127}.$$

$$P(H \cap S^c) = 0,005; \quad P(H^c | S) = \frac{54}{73}; \quad P(H | S^c) = \frac{1}{127}.$$

### Problema 6 · Viajes y estado civil

Sean  $V_1, V_2, V_3$  los sucesos de realizar uno, dos y tres o más viajes, y  $M$  el suceso «está casado». Los datos son  $P(V_1) = 0,6$ ,  $P(V_2) = 0,3$ ,  $P(V_3) = 0,1$  y  $P(M \cap V_1) = 0,54$ ,  $P(M \cap V_2) = 0,14$ ,  $P(M \cap V_3) = 0,02$ .

a) Para dos o más viajes,  $P(V_2 \cup V_3) = 0,4$ . La proporción de no casados en esos grupos es

$$P(M^c \cap (V_2 \cup V_3)) = (0,30 - 0,14) + (0,10 - 0,02) = 0,24,$$

por lo que la probabilidad condicionada es  $0,24/0,4 = 0,6$ .

b) Para  $G =$  «no está casado» y  $H =$  «realiza menos de tres viajes»,

$$P(G) = 1 - (0,54 + 0,14 + 0,02) = 0,30, \quad P(H) = 0,90,$$

$$P(G \cap H) = (0,60 - 0,54) + (0,30 - 0,14) = 0,22.$$

Así,

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = 0,30 + 0,90 - 0,22 = 0,98.$$

c) Sean  $J =$  «está casado» y  $K =$  «no realiza exactamente dos viajes». Entonces  $P(J) = 0,70$ ,  $P(K) = 0,60 + 0,10 = 0,70$  y  $P(J \cap K) = 0,54 + 0,02 = 0,56$ . Como  $0,56 \neq 0,70(0,70) = 0,49$ , no son independientes.

$$P(M^c | V_2 \cup V_3) = 0,6; \quad P(G \cup H) = 0,98; \quad J, K \text{ no son independientes.}$$