

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$
 dependiente del parámetro real λ ,

se pide :

- Determinar para qué valores de λ el sistema es: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible (1,3 puntos).
- Obtener las soluciones en los casos compatible determinado y compatible indeterminado (2 puntos).

Solución:

a) La matriz ampliada de este sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \lambda \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Tanto la matriz de coeficientes (A) como la ampliada A' tienen como máximo rango 3; empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Veamos para que valores del parámetro el determinante es nulo, resolvemos la ecuación

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ hay un menor de orden 3 no nulo, luego $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas
Sistema compatible determinado

Para $\lambda = 0$ el menor de orden 3 de A es nulo, el rango de A será como máximo 2, estudiemos los rangos de A y A'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Estudiemos el siguiente menor de A} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \text{luego } \text{rang}(A)=2 \text{ y el } \text{rang}(A') \text{ será al menos 2.}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{En esta matriz se observa que } F_1 = -2 F_2 \\ \text{por lo que } \text{rang}(A') = 2 \end{matrix}$$

luego $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < n^\circ$ de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Para $\lambda = -1$ igual que en el caso anterior el menor de orden 3 de A es nulo. Estudiemos los rangos de A y A'.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Estudiemos el siguiente menor de A} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{luego } \text{rang}(A)=2 \text{ y el } \text{rang}(A') \text{ será al menos 2.}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{orlando el menor anterior con la 4}^a \\ \text{columna y 3}^a \text{ fila} \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0 \quad \text{luego } \text{rang}(A')=3$$

luego $\text{rang}(A)=2$ y $\text{rang}(A')=3$, es decir $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A')$
Sistema incompatible

En resumen, para $\lambda = -1$ Sistema Incompatible,
para $\lambda = 0$ Sistema Compatible Indeterminado,
para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ Sistema Compatible Determinado.

b) Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ Sistema Compatible Determinado.

Lo resolvemos por Cramer, $|A|$ ya lo calculamos en el apartado a) $|A| = \lambda^2 + \lambda$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6\lambda - 10\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{-4\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{-4\lambda}{\lambda(\lambda + 1)} = \frac{-4}{\lambda + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 5\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\lambda^2 + 3\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\lambda(\lambda + 3)}{\lambda(\lambda + 1)} = \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5\lambda^2 - 3\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2\lambda^2}{\lambda(\lambda + 1)} = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}$$

En los cálculos anteriores como $\lambda \neq 0$ al final podemos simplificar por λ

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ la solución del sistema es $x = \frac{-4}{\lambda + 1}$ $y = \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1}$ $z = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}$

Para $\lambda = 0$ Sistema Compatible Indeterminado.

Para este valor de λ , del menor de orden 2 no nulo obtenido en el apartado a) escogemos las ecuaciones e incógnitas principales, es decir, tomamos la 2ª y 3ª ecuación:

$$-z = 0$$

$$x + 3y + z = 5$$

las incógnitas principales son z e y , pasamos x al término independiente y el sistema a resolver es,

$$\begin{cases} -z = 0 \\ 3y + z = 5 - x \end{cases} \quad \text{sustituyendo el valor de } z \text{ en la 2ª ecuación } 3y + 0 = 5 - x \quad y = \frac{5 - x}{3}$$

La solución del sistema será:

$$\text{Solución } \begin{cases} x = \mu \\ y = \frac{5 - \mu}{3} \\ z = 0 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO A

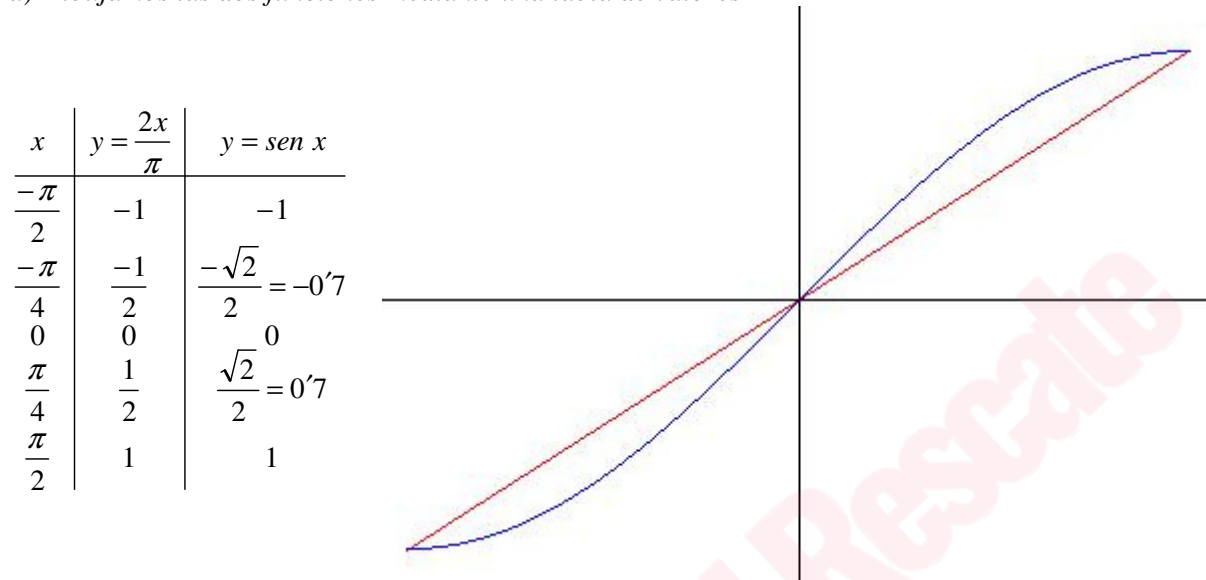
PROBLEMA 2. a) Dibujar la recta de ecuación $y = (2/\pi)x$ y la curva de ecuación $y = \operatorname{sen} x$ cuando $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; obtener razonadamente por cálculo integral el área limitada entre la recta y la curva (1,6 puntos).

b) Calcular la integral del producto de las dos funciones consideradas en el apartado anterior, es decir,

$$\int (2/\pi) x \operatorname{sen} x \, dx, \text{ indicando los pasos realizados (1,7 puntos).}$$

Solución:

a) Dibujamos las dos funciones mediante una tabla de valores



Las dos funciones son continuas en el intervalo considerado, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, por lo tanto en el cálculo del área limitada entre ellas podemos emplear la regla de Barrow. Descomponemos el cálculo del área en dos trozos según que la recta esté por encima o por debajo de la curva $y = \operatorname{sen} x$,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\pi/2}^0 \left(\frac{2x}{\pi} - \operatorname{sen} x \right) dx + \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen} x - \frac{2x}{\pi} \right) dx = \left[\frac{x^2}{\pi} + \cos x \right]_{-\pi/2}^0 + \left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi} \right]_{\pi/2}^0 = \\
 &= \left[0 + \cos 0 - \left(\frac{\left(-\frac{\pi}{2} \right)^2}{\pi} + \cos \frac{-\pi}{2} \right) \right] + \left[-\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2}{\pi} - (-\cos 0 - 0) \right] = 1 - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) u. a.
 \end{aligned}$$

b) Para resolver esta integral primero extraemos la constante fuera de la integral y ésta la resolvemos por partes,

$$\int \left(\frac{2}{\pi} \right) x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{\pi} \int x \operatorname{sen} x \, dx = (1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Calculamos } \int x \operatorname{sen} x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = \\
 &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x
 \end{aligned}$$

Luego

$$(1) = \frac{2}{\pi} (-x \cos x + \operatorname{sen} x + C)$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. La tabla siguiente muestra las alturas (en metros) y los pesos (en kilos) de un grupo de 8 empleados de una empresa:

Altura	1,75	1,58	1,80	1,50	1,65	1,75	1,85	1,63
Peso	78	75	90	68	78	84	89	80

Las variables altura y peso están fuertemente correlacionadas, siendo su coeficiente de correlación 0,9197.

a) Estimar, mediante regresión lineal, el peso de un empleado que mida 1,72 metros (1,7 puntos).

b) Estimar, mediante regresión lineal, la altura de un empleado que pese 80 kilos (1,6 puntos).

Solución:

Obtengamos la tabla de valores que permitirá calcular los parámetros de los apartados a) y b)

Llamamos $x = \text{altura}$ $y = \text{peso}$

x	y	x^2	y^2	$x y$
1,75	78	3,0625	6084	136,5
1,58	75	2,4964	5625	118,5
1,80	90	3,24	8100	162
1,50	68	2,25	4624	102
1,65	78	2,7225	6084	128,7
1,75	84	3,0625	7056	147
1,85	89	3,4225	7921	164,65
1,63	80	2,6569	6400	130,4
13,51	642	23	51894	1089,75

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{13,51}{8} = 1,68875 \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{642}{8} = 80,25$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{23}{8} - \bar{x}^2} = 0,11084 \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{51894}{8} - \bar{y}^2} = 6,83283$$

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} = \frac{1089,75}{8} - \bar{x} \bar{y} = 0,69653 \quad \rho = \frac{0,69653}{0,11084 \cdot 6,83283} = 0,91972$$

Como el coeficiente de correlación es 0,91972 la correlación entre ambas variables es muy fuerte y positiva, luego las rectas de regresión sirven para estimar alturas o pesos siempre que el dato del que partamos este cercano o en el rango de los valores de la variable estudiada.

a) La altura (x) 1,72 m está en el rango de los valores de la altura estudiados (1,50 – 1,85), usamos la recta de regresión de y sobre x para estimar el peso que le corresponda,

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}) \rightarrow y - 80,25 = \frac{0,69653}{0,11084^2} (x - 1,68875)$$

$$\text{Para } x = 1,72 \rightarrow y - 80,25 = 56,6959 (1,72 - 1,68875) \rightarrow \hat{y} = 82,02$$

b) El peso (y) 80 Kg está en el rango de los valores de los pesos estudiados (68 – 89), usamos la recta de regresión de x sobre y para estimar la altura que le corresponda,

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} (y - \bar{y}) \rightarrow x - 1,68875 = \frac{0,69653}{6,83283^2} (x - 80,25)$$

$$\text{Para } y = 80 \rightarrow x - 1,68875 = 0,0149 (x - 80,25) \rightarrow \hat{x} = 1,69$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Sean r y r' las rectas del espacio $\mathbb{R}^3$, determinadas del modo siguiente:

r pasa por los puntos $A = (3,6,7)$ y $B = (7,8,3)$ y r' es la recta de intersección de los planos de ecuaciones: $x - 4y - z = -10$ y $3x - 4y + z = -2$. Se pide:

a) Calcular de cada una de las rectas r y r' una ecuación paramétrica y determinar la posición relativa de ambas (1 punto).

b) Calcular la distancia d entre las rectas r y r' (1,3 puntos).

c) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C, siendo C un punto cualquiera de la recta r' (1 punto).

Solución:

a) Ecuación paramétrica de r

De la recta r conocemos	$r: \begin{cases} \text{Punto } A(3,6,7) \\ \vec{v}_r = \vec{AB} = (4,2,-4) \end{cases}$	por lo que una ecuación paramétrica será	$r: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 6 + 2\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$
---------------------------	--	--	--

Una ecuación paramétrica de r' la encontramos resolviendo el sistema de ecuaciones que la define,

$$r' : \begin{cases} x - 4y - z = -10 \\ 3x - 4y + z = -2 \end{cases}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0 \rightarrow x \text{ y } z \text{ son incógnitas principales.}$

Resolvemos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} x - z = -10 + 4y \\ 3x + z = -2 + 4y \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -10 + 4y & -1 \\ -2 + 4y & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-10 + 4y - 2 + 4y}{4} = \frac{-12 + 8y}{4} = -3 + 2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -10 + 4y \\ 3 & -2 + 4y \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2 + 4y + 30 - 12y}{4} = \frac{28 - 8y}{4} = 7 - 2y$$

Una ecuación paramétrica de r' es $r': \begin{cases} x = -3 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 7 - 2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Determinemos la posición relativa de las dos rectas. Las ecuaciones paramétricas obtenidas nos dan un punto y un vector director de cada una de ellas,

$$r: \begin{cases} P_r(3,6,7) \\ \vec{v}_r(4,2,-4) \end{cases} \quad r': \begin{cases} P_{r'}(-3,0,7) \\ \vec{v}_{r'}(2,1,-2) \end{cases} \quad \text{observemos que } \vec{v}_r = 2 \vec{v}_{r'} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_{r'}$$

La posición relativa de las dos rectas la obtenemos estudiando los rangos de las siguientes matrices,

$$M = \begin{pmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_{r'} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M' = \begin{pmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_{r'} & \vec{P_r P_{r'}} \end{pmatrix}$$

Como $\vec{v}_r \parallel \vec{v}_{r'} \rightarrow \text{rang}(M) = 1$

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3-3 \\ 2 & 1 & 0-6 \\ -4 & -2 & 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -6 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera y segunda columna de M' son proporcionales, luego $\text{rang}(M') \leq 2$. Consideramos el siguiente menor de orden 2 de M'

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -24 + 12 = -12 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M') = 2$$

Como $\text{rang}(M) = 1$ y $\text{rang}(M') = 2 \Rightarrow r$ y r' son paralelas.

b) Como las dos rectas son paralelas, la distancia entre ellas es la distancia de un punto de una a la otra

$$d(r, r') = d(P_{r'}, r) = \frac{\left| \vec{P_r P_{r'}} \times \vec{v_r} \right|}{\left| \vec{v_r} \right|}$$

$$\vec{P_r P_{r'}} = (-6, -6, 0)$$

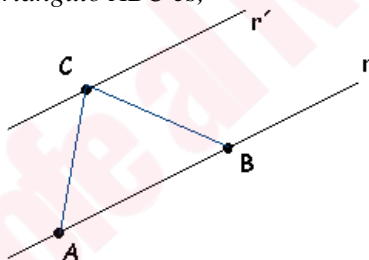
$$\vec{P_r P_{r'}} \times \vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 24\vec{i} - 24\vec{j} + 12\vec{k} = (24, -24, 12)$$

$$\left| \vec{P_r P_{r'}} \times \vec{v_r} \right| = \sqrt{24^2 + (-24)^2 + 12^2} = 36$$

$$\left| \vec{v_r} \right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = 6$$

$$d(r, r') = \frac{36}{6} = 6 \text{ u.l.}$$

c) La representación gráfica aproximada del triángulo ABC es,



En el cálculo del área del triángulo interviene la base que será $d(A, B)$ y la altura que será $d(C, r)$. Como las rectas r y r' son paralelas $d(C, r) = d(r', r) = 6$ (calculada en el apartado b)

$$d(A, B) = \sqrt{(7-3)^2 + (8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$A_T = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ u.a.}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. a) Calcular las matrices reales de orden 3, X e Y , que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 2X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases} \quad \text{donde } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,8 \text{ puntos}).$$

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcular la matriz $(2X + Y)X - (2X + Y)(2Y)$ (1,5 puntos).

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \text{Resolvemos el sistema por reducción} \quad & \begin{cases} 2X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases} \\ & \begin{aligned} & \times 2 \quad \begin{cases} 4X + 2Y = 2B \\ X - 2Y = C \end{cases} \\ & \text{Sumando ambas ecuaciones} \\ & 5X = 2B + C \rightarrow X = \frac{1}{5}(2B + C) \end{aligned} \\ & \begin{aligned} & \begin{cases} 2X + Y = B \\ \times (-2) \quad -2X + 4Y = -2C \end{cases} \\ & \text{Sumando ambas ecuaciones} \\ & 5Y = B - 2C \rightarrow Y = \frac{1}{5}(B - 2C) \end{aligned} \end{aligned}$$

Calculemos las matrices X e Y .

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{5} \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \\ Y &= \frac{1}{5} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ -2/5 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Para calcular $(2X + Y)X - (2X + Y)(2Y)$, tendremos en cuenta que, según el sistema, $2X + Y = B$

Por lo tanto: $(2X + Y)X - (2X + Y)(2Y) = BX - B(2Y) =$

$$= B \frac{1}{5}(2B + C) - B \left(2 \frac{1}{5}(B - 2C) \right) = \frac{2}{5}B^2 + \frac{1}{5}BC - \frac{2}{5}B^2 + \frac{4}{5}BC = BC =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Sea T un triángulo de perímetro 60 cm. Uno de los lados del triángulo T mide x cm y los otros dos lados tienen la misma longitud.

a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

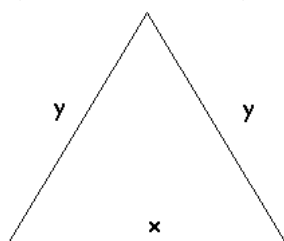
$$A(x) = \text{Área del triángulo } T.$$

$$f(x) = \{A(x)\}^2 \quad (1,3 \text{ puntos}).$$

b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que $f(x)$ alcanza el valor máximo (2 puntos).

Solución:

a) El triángulo T es un triángulo isósceles, por lo tanto,

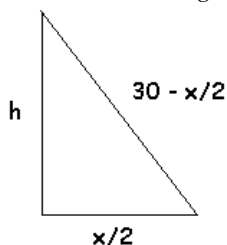


$$x + 2y = 60$$

$$2y = 60 - x$$

$$y = 30 - \frac{x}{2}$$

Calculamos la altura del triángulo aplicando el teorema de Pitágoras



$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(30 - \frac{x}{2}\right)^2$$

$$h^2 + \frac{x^2}{4} = 900 - 30x + \frac{x^2}{4}$$

$$h^2 = 900 - 30x$$

$$h = \sqrt{900 - 30x}$$

Las expresiones de las funciones serán:

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{900 - 30x}$$

$$f(x) = \{A(x)\}^2 = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{900 - 30x}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2(900 - 30x) = \frac{1}{4}(900x^2 - 30x^3)$$

Por ser un triángulo isósceles, lado igual y , debe cumplirse que $2y > x$; luego $60 - x > x$; $60 > 2x$, es decir, $x < 30$.

Para que haya triángulo debe ser $x > 0$.

Por lo que el dominio de las funciones $A(x)$ y $f(x)$ es el intervalo abierto $(0, 30)$

b) Busquemos el máximo de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(1800x - 90x^2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{4}(1800x - 90x^2) = 0 \rightarrow 1800x - 90x^2 = 0 \rightarrow 20x - x^2 = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=20 \end{cases}$$

Como $\text{Dom } f(x) = (0, 30)$ sólo consideramos la solución $x=20$

$$f''(x) = \frac{1}{4}(1800 - 180x) = 450 - 45x$$

$$\text{Para } x=20 \quad f''(20) = 450 - 900 = -450 < 0$$

$f(x)$ tiene un máximo relativo para $x = 20$.

$f(x)$ es una función polinómica, luego es continua; en sus extremos, $f(0)=0$ y $f(30)=0$, toma valores inferiores a $f(20)=30000$; por lo que en $x = 20$ $f(x)$ alcanza su máximo absoluto.

$f(x)$ alcanza su máximo para $x = 20$.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Un dado, cuyas caras están numeradas del 1 al 6 se lanza cinco veces. Se pide la probabilidad de que el número 3 salga:

a) Exactamente dos veces (1 punto). b) Una vez a lo sumo (1 punto). c) Más de dos veces (1,3 puntos).

NOTA: Todos los números tienen la misma probabilidad de salir en cada lanzamiento.

Solución:

Consideramos la siguiente variable aleatoria,

X = número de veces que sale 3 al lanzar cinco veces un dado.

X es una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 5$ y $p = P(\text{obtener 3 al lanzar el dado}) = 1/6$,

$$X = B\left(5, \frac{1}{6}\right)$$

a) A = obtener el 3 exactamente dos veces

$$P(A) = P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5^3}{2 \cdot 6^5} = 0.160751$$

b) B = obtener el 3 una vez a lo sumo

$$P(B) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5 \frac{5^4}{6^5} = 2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.8037551$$

c) C = Obtener el 3 más de dos veces

$$P(C) = P(X > 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$$

usando los cálculos de los apartados anteriores

$$= 1 - [P(B) + P(A)] = 1 - (0.8037551 + 0.160751) = 1 - 0.9645061 = 0.0354939$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Sean r la recta y π el plano de $\mathbb{R}^3$, determinados del siguiente modo:

- r pasa por los puntos $(2,2,4)$ y $(-1,2,1)$ y el plano π pasa por los puntos $(1,0,1)$, $(1,-1,0)$ y $(3,0,0)$. Se pide:
- Probar que la recta r no es paralela a π (1 punto).
 - Calcular el punto P de intersección de r y π y el ángulo que forman la recta r y el plano π (1 punto).
 - Determinar los puntos S y T de la recta r que cumplan que su distancia a π sea 4 (1,3 puntos).

Solución:

a) *Obtenemos el vector director de la recta r*

$$\vec{v}_r = (2,2,4) - (-1,2,1) = (3,0,3)$$

Obtenemos el vector ortogonal al plano π

$$(1,0,1) - (1,-1,0) = (0,1,1)$$

$$(1,0,1) - (3,0,0) = (-2,0,1)$$

$$\vec{u}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (1, -2, 2)$$

Para que $r \parallel \pi$ debe ser $\vec{v}_r \perp \vec{u}_\pi$

$$(3,0,3) \cdot (1,-2,2) = 3 + 6 = 9 \neq 0, \text{ luego la recta no es paralela al plano } \pi$$

b) *Obtenemos las ecuaciones de la recta y del plano,*

De la recta r conocemos uno de sus puntos $(2,2,4)$ y su vector director obtenido en el apartado anterior, luego:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Del plano π conocemos su vector ortogonal, obtenido en el apartado anterior, la ecuación general del plano será: $x - 2y + 2z + D = 0$; como el plano contiene al punto, por ejemplo, $(3,0,0)$ sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos el valor de D

$$3 + D = 0, \text{ luego } D = -3$$

$$\pi: x - 2y + 2z - 3 = 0$$

Busquemos el corte entre la recta y el plano, sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano,

$$2 + 3\lambda - 2 \cdot 2 + 2(4 + 3\lambda) - 3 = 0$$

$$2 + 3\lambda - 4 + 8 + 6\lambda - 3 = 0$$

$$3 + 9\lambda = 0 \rightarrow 9\lambda = -3 \rightarrow \lambda = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta obtenemos el punto de corte,

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot \frac{-1}{3} = 2 - 1 = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 + 3 \cdot \frac{-1}{3} = 4 - 1 = 3 \end{cases} \quad \text{El punto de corte es } (1,2,3)$$

Para calcular el ángulo que forman la recta y el plano utilizamos el vector director de la recta y el ortogonal del plano,

$$\left| \cos \left(\vec{v}_r, \vec{u}_\pi \right) \right| = \frac{|(3,0,3) \cdot (1,-2,2)|}{\sqrt{9+9} \sqrt{1+4+4}} = \frac{|3+6|}{\sqrt{18} \sqrt{9}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{luego } \left(\vec{v}_r, \vec{u}_\pi \right) = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto el ángulo que forman la recta y el plano es $\frac{\pi}{4} \text{ rds}$ o 45°

c) Para calcular la distancia entre un punto y un plano utilizamos la expresión,

$$d(P, \pi) = \frac{|A p_1 + B p_2 + C p_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{siendo} \quad \begin{matrix} P(p_1, p_2, p_3) \\ \pi : Ax + By + Cz + D = 0 \end{matrix}$$

En nuestro caso,

$$4 = \frac{|2 + 3\lambda - 2 \cdot 2 + 2(4 + 3\lambda) - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$4 = \frac{|3 + 9\lambda|}{3}$$

$$12 = |3 + 9\lambda| \rightarrow \begin{cases} 12 = 3 + 9\lambda \rightarrow 9 = 9\lambda \rightarrow \lambda = 1 \\ -12 = 3 + 9\lambda \rightarrow -15 = 9\lambda \rightarrow \lambda = \frac{-15}{9} = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

Los puntos buscados serán,

$$\text{Para } \lambda = 1, \begin{cases} x = 2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5 \\ y = 2 \\ z = 4 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7 \end{cases} \quad S(5, 2, 7)$$

$$\text{Para } \lambda = \frac{-5}{3}, \begin{cases} x = 2 + 3 \cdot \frac{-5}{3} = 2 - 5 = -3 \\ y = 2 \\ z = 4 + 3 \cdot \frac{-5}{3} = 4 - 5 = -1 \end{cases} \quad T(-3, 2, -1)$$

Tu Profecia al Rescate