

Modelo 1 de 2003

Límites, tangentes, matrices, integrales y geometría del espacio.

Opción A - Ejercicio 1

Al sustituir $x = 0$ se obtiene $0/0$. Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + \sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

Opción A - Ejercicio 2

La tangente a $f(x) = e^{x/3}$ en $x = a$ pasa por el origen cuando su ordenada en $x = 0$ es cero. Como $f'(x) = e^{x/3}/3$, la tangente en a es

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = \frac{e^{a/3}}{3}x + e^{a/3}\left(1 - \frac{a}{3}\right).$$

El último término se anula si $a = 3$. El punto de tangencia es $(3, e)$ y la recta tangente es $y = ex/3$. La función exponencial es convexa, por lo que entre $x = 0$ y $x = 3$ la curva queda por encima de su tangente. El área encerrada es

$$S = \int_0^3 \left(e^{x/3} - \frac{e}{3}x\right) dx = \left[3e^{x/3} - \frac{e}{6}x^2\right]_0^3 = \boxed{\frac{3}{2}(e - 2)}.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz A es triangular inferior, así que $\det A = 1 \cdot m \cdot 1 = m$. Para que la ecuación matricial $AX = 3C - 2B$ tenga una única solución X , debe ser invertible la matriz que multiplica a cada columna. Esto ocurre exactamente cuando $m \neq 0$. Para $m = 1$,

$$X = A^{-1}(3C - 2B) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Como $ABCD$ es un paralelogramo con vértices consecutivos,

$$D = A + C - B = (1, 0, -1) + (-7, 1, 5) - (3, 2, 1) = \boxed{(-9, -1, 3)}.$$

El área es el módulo del producto vectorial de dos lados consecutivos. Calculamos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (2, 2, 2), & \overrightarrow{BC} &= C - B = (-10, -1, 4), \\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} &= (10, -28, 18).\end{aligned}$$

Por tanto, el área del paralelogramo es

$$\boxed{\sqrt{10^2 + (-28)^2 + 18^2} = 2\sqrt{302}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Integramos por partes para hallar una primitiva:

$$\int (x-1) \ln x \, dx = \int x \ln x \, dx - \int \ln x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} + x + C.$$

La primitiva debe pasar por $(1, -3/2)$. Al sustituir $x = 1$, el término logarítmico se anula y $-1/4 + 1 + C = -3/2$, así que $C = -9/4$. La función pedida es

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} + x - \frac{9}{4}, \quad x > 0.$$

Opción B - Ejercicio 2

Para $x < 0$, $|x| = -x$ y $f(x) = x/(1+x)$; para $x > 0$, $f(x) = x/(1-x)$. En los puntos distintos de $-1, 0, 1$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x < 0, \\ \frac{1}{(1-x)^2}, & x > 0. \end{cases}$$

En $x = 0$, ambas ramas tienden a 0, coincidiendo con $f(0)$. Además, sus derivadas laterales valen 1, por lo que $f'(0) = 1$. En $x = \pm 1$, la función está definida con valor 0, pero las ramas tienen límites infinitos; no es continua y, por tanto, no es derivable. En conclusión, es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ y la derivada queda dada por las expresiones anteriores junto con $f'(0) = 1$. **Opción B - Ejercicio 3**

Para que $A + \lambda I$ no tenga inversa, su determinante debe ser cero. Calculando y factorizando,

$$\det(A + \lambda I) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 3),$$

de donde $\lambda = 3$ o $\lambda = -3$. La ecuación $AX = 3X$ equivale a $(A - 3I)X = 0$. El sistema homogéneo tiene como soluciones los múltiplos del vector $(1, -2, 1)$:

$$X = t(1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Geométricamente, el conjunto de soluciones es una recta que pasa por el origen. **Opción B - Ejercicio 4**

En un rectángulo, los lados consecutivos AB y BC son perpendiculares. Además, como $ABCD$ es un paralelogramo, CD es paralelo a AB . Si C, D y el origen están en una misma recta, esa recta debe tener la dirección de AB . Calculamos $\vec{AB} = (1, 1, 1)$. Escribimos $C = t(1, 1, 1)$; entonces $D = C - \vec{AB} = (t-1)(1, 1, 1)$. La perpendicularidad $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ da

$$(1, 1, 1) \cdot (t-2, t-2, t-1) = 3t-5 = 0 \implies t = \frac{5}{3}.$$

Así,

$$C = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right), \quad D = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$