

Convocatoria extraordinaria de 2025

Resolución de los siete ejercicios, con desarrollo de los apartados obligatorios y optativos.

Ejercicio 1

Sean $x, y, z \in \mathbb{N}$ los tres números. Restamos al segundo dato el doble de la suma:

$$(4x + 3y + 2z) - 2(x + y + z) = 61 - 44 \implies 2x + y = 17.$$

Por tanto,

$$y = 17 - 2x, \quad z = 22 - x - y = 5 + x.$$

Si los naturales son positivos, $x = 1, 2, \dots, 8$ y se obtienen las ocho ternas $(x, 17 - 2x, 5 + x)$. Si se admite el cero en $\mathbb{N}$, también se añade la terna $(0, 17, 5)$.

Si uno de los números vale 15, comprobamos su posible posición. Para $y = 15$, la ecuación $2x + y = 17$ da $x = 1$ y entonces $z = 6$. En cambio, $x = 15$ daría $y = -13$, y $z = 15$ exigiría simultáneamente $x + y = 7$ y $2x + y = 17$, de donde $x = 10$, $y = -3$; no son números naturales. Así que sí puede aparecer el 15, y la única terna positiva es $(1, 15, 6)$.

Ejercicio 2

Completamos el cuadrado para reconocer una primitiva inmediata:

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x+1)^2 + 1}.$$

Como $\frac{d}{dx} \arctan(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2 + 1}$, toda primitiva es $F(x) = \arctan(x+1) + C$. La gráfica pasa por $(0, \pi/4)$, así que

$$\frac{\pi}{4} = F(0) = \arctan(1) + C = \frac{\pi}{4} + C,$$

por lo que $C = 0$ y $F(x) = \arctan(x+1)$.

Ejercicio 3

Sacamos el factor constante e^{-k} y usamos que $\frac{d}{dx}[(x-3)e^x] = (x-2)e^x$:

$$\int_1^3 e^{x-k}(x-2) dx = e^{-k}[(x-3)e^x]_1^3 = 2e^{1-k}.$$

Al igualar a 2, resulta $e^{1-k} = 1$. La función exponencial es inyectiva, así que $1 - k = 0$ y $k = 1$.

Ejercicio 4

La recta r es la intersección de dos planos con normales $(1, -1, 1)$ y $(1, 2, -1)$. Su vector director es el producto vectorial de esas normales,

$$\vec{d}_r = (1, -1, 1) \times (1, 2, -1) = (-1, 2, 3).$$

El plano π tiene normal $(m, -1, -2)$. Para que r sea paralela a π , su director debe ser perpendicular a la normal:

$$(m, -1, -2) \cdot (-1, 2, 3) = -m - 8 = 0 \implies m = -8.$$

Para $m = -8$, un punto de r es $P = (3, 1, 1)$, que verifica ambas ecuaciones que definen la recta. La distancia de la recta al plano es la distancia de este punto al plano, pues son paralelos. Aplicamos la fórmula para $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-8 \cdot 3 - 1 - 2 - 5|}{\sqrt{64 + 1 + 4}}.$$

Por tanto, $d(r, \pi) = \frac{32}{\sqrt{69}}$.

Ejercicio 5

Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (-1, -2, 2) + t(4, 3, -1), \quad s : (x, y, z) = (1, 2, -3) + u(-1, 1, -2).$$

Sus directores no son proporcionales. Además, el vector entre los puntos de referencia es $(2, 4, -5)$ y

$$(2, 4, -5) \cdot ((4, 3, -1) \times (-1, 1, -2)) = (2, 4, -5) \cdot (-5, 9, 7) = 1 \neq 0.$$

Por tanto, las rectas no son coplanarias y son alabeadas.

El director de la perpendicular común es el producto vectorial $\vec{n} = (-5, 9, 7)$. Para hallar el pie sobre cada recta, imponemos que el vector que une los puntos correspondientes sea perpendicular a ambos directores. Se obtiene $t = 138/155$ y $u = -287/155$. El punto de corte de la perpendicular común con r es

$$H = (-1, -2, 2) + \frac{138}{155}(4, 3, -1) = \left(\frac{397}{155}, \frac{104}{155}, \frac{172}{155}\right).$$

Un plano que contiene a r y a esa perpendicular tiene como direcciones $(4, 3, -1)$ y $(-5, 9, 7)$; un vector normal es su producto vectorial $(30, -23, 51)$. Usando H :

$$30x - 23y + 51z + D = 0, \quad D = -118.$$

La ecuación pedida es $\boxed{30x - 23y + 51z - 118 = 0}$.

Ejercicio 6

Para que el límite sea finito, el término de primer orden del numerador debe anularse. Usamos $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ y $e^x - 1 = x + x^2/2 + o(x^2)$:

$$x \sin x + a(e^x - 1) + \sin x = (a + 1)x + \left(1 + \frac{a}{2}\right)x^2 + o(x^2),$$
$$bx^2 + x - \sin x = bx^2 + o(x^2).$$

Luego $a = -1$. Con ese valor, el cociente tiende a $\frac{1/2}{b}$. Como el límite vale 1, $b = 1/2$. Así, $\boxed{a = -1, b = \frac{1}{2}}$.

Ejercicio 7

Sea X la velocidad, en km/h.

a) Si $X \sim N(64, 4)$, tipificamos el umbral del radar:

$$P(X \geq 72) = P\left(Z \geq \frac{72 - 64}{4}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

Se sanciona aproximadamente al $\boxed{2.28\%}$ de los vehículos.

b) Ahora $X \sim N(63.6, \sigma)$. La probabilidad de superar 80 km/h es 0.0505, por lo que $P(Z \leq z) = 0.9495$. De la tabla, $z = 1.64$:

$$\frac{80 - 63.6}{\sigma} = 1.64 \implies \sigma = \frac{16.4}{1.64} = 10.$$

La desviación típica es $\boxed{10 \text{ km/h}}$.