

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

En $x = 0$, el límite del primer tramo es 1, pues $\ln(e^x + x^3) = x + o(x)$. La continuidad obliga a que $a = 1$. En $x = 1$, el tramo central vale $4 + a = 5$, mientras que el derecho vale $b + \sin \pi = b$; por continuidad, $b = 5$. Así, $a = 1, b = 5$.

Ejercicio 2

El denominador $e^{2x} + 1$ es positivo para todo x , así que el dominio es $\mathbb{R}$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 1$; cuando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -1$. Las asíntotas horizontales son $y = 1$ y $y = -1$; no hay verticales ni oblicuas. La derivada es $f'(x) = 4e^{2x}/(e^{2x} + 1)^2 > 0$. Por tanto, la función crece en todo $\mathbb{R}$ y no decrece.

Ejercicio 3

Usando $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ y $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$,

$$2 \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos 2x.$$

Entonces

$$\int_0^{\pi/2} (2 \sin^2 x - \cos^2 x) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{3 \sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Ejercicio 4

Para $x \geq 0$, $|x| - 2 = x - 2$; para $x < 0$, $|x| - 2 = -x - 2$. Al igualar con $4 - x^2$, los cortes son $x = 2$ y $x = -2$, ambos con ordenada 0. Entre los cortes, $g(x) = 4 - x^2$ queda por encima de $f(x) = |x| - 2$. Por simetría,

$$S = 2 \int_0^2 (6 - x - x^2) dx = 2 \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \boxed{\frac{44}{3}}.$$

Ejercicio 5

Calculamos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Para esos tres valores, $\text{rg}(A - \lambda I) = 2$; para cualquier otro, el determinante no se anula y el rango es 3. Así,

$$\text{rg}(A - \lambda I) = 2 \text{ si } \lambda \in \{1, 3, 4\}, \text{ y } 3 \text{ en otro caso.}$$

Para $\lambda = 1$, el sistema homogéneo se reduce a $x + 2z = 0$, $y + 3z = 0$. Tomando $z = t$, las soluciones son $(-2t, -3t, t)$. Si $x = 2$, entonces $t = -1$, y una solución es $(2, 3, -1)$.

Ejercicio 6

Las matrices son A de tamaño 2×3 y B de tamaño 3×2 . Su producto es

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m+1 & 2m \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = 3m + 1.$$

Por tanto, AB no tiene inversa cuando $m = -1/3$.

El producto BA es de orden 3 y su determinante es cero, ya que su rango no supera 2. Además, el menor de las filas 1 y 2 y columnas 1 y 3 vale -2 , así que su rango es siempre 2. En conclusión, $\text{rg}(BA) = 2$ para todo m .

Ejercicio 7

El director de r es $(3, 2, 1)$. El plano que contiene a r y es paralelo a s tiene un normal perpendicular a los directores $(3, 2, 1)$ y $(1, 2, -1)$; su producto vectorial es proporcional a $(-1, 1, 1)$. Con el punto $(2, -1, 3)$ de r , obtenemos

$$-x + y + z = 0.$$

Un plano perpendicular a s tendría normal paralelo a $(1, 2, -1)$. Para contener a r , ese normal debería ser ortogonal a su director $(3, 2, 1)$; pero $(1, 2, -1) \cdot (3, 2, 1) = 6 \neq 0$. Por tanto, ningún plano perpendicular a s puede contener a r .

Ejercicio 8

La recta r se parametriza como $(-3, -4, 3) + t(2, 2, 3)$; la recta por P y Q es $(1, 0, 2) + u(a - 1, 1, -2)$. Igualando las coordenadas y, z se obtiene $u = -4 + 2t$ y $3 + 3t = 2 - 2u$, de donde $t = 1$, $u = -2$. La coordenada x entonces exige $-1 = 1 - 2(a - 1)$, así que $a = 2$. El punto de intersección es $(-1, -2, 6)$.