

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Estudio, gráfica y área

La función es

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Al ser racional con denominador siempre positivo, su dominio es $\mathbb{R}$.

a) Crecimiento y decrecimiento. El signo de la derivada determina la monotonía:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

El denominador es positivo, así que $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$. **Conclusión.** f es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

b) Puntos de inflexión. Calculamos la segunda derivada y buscamos sus ceros:

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

El numerador cambia de signo en ambos valores y el denominador siempre es positivo, así que los dos son puntos de inflexión. Sus ordenadas son

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}.$$

Conclusión. Los puntos de inflexión son $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{4}\right)$.

c) Asíntotas y gráfica. El denominador no se anula, luego no hay asíntotas verticales. Además,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1,$$

por lo que $y = 1$ es asíntota horizontal en ambos extremos; al existir asíntota horizontal, no hay oblicua. La función es par, alcanza un máximo relativo y absoluto en $(0, 2)$ y se aproxima a 1 por arriba en los dos extremos.



d) Área acotada. La recta $y = x + 2$ corta al eje x en $x = -2$ y a la curva cuando

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = x + 2 \iff x(x^2 + x + 1) = 0.$$

Como $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales, el único corte entre la recta y la curva es $(0, 2)$. El contorno pedido queda dividido en dos partes: la recta es el borde superior en $[-2, 0]$ y la gráfica lo es en $[0, 1]$. Ambas están por encima del eje de abscisas en esos intervalos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-2}^0 (x + 2) dx + \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx \\ &= 2 + \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = 2 + 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área del recinto es $3 + \frac{\pi}{4}$ unidades cuadradas.

Opción A - Ejercicio 2. Perpendicular común y distancia

Parametrizamos las rectas:

$$r : (x, y, z) = (0, 1, -4) + t(2, 3, -1), \quad s : (x, y, z) = (0, 0, 0) + u(1, 1, 4).$$

Un vector perpendicular a las dos direcciones es

$$\vec{n} = (2, 3, -1) \times (1, 1, 4) = (13, -9, -1).$$

Para encontrar los puntos de corte de la perpendicular común con ambas rectas, sean $R \in r$ y $S \in s$. Imponemos $\overrightarrow{RS} \cdot (2, 3, -1) = 0$ y $\overrightarrow{RS} \cdot (1, 1, 4) = 0$. La resolución da $t = -\frac{141}{251}$ y $u = -\frac{217}{251}$, es decir,

$$R = \left(-\frac{282}{251}, -\frac{172}{251}, -\frac{863}{251}\right), \quad S = \left(-\frac{217}{251}, -\frac{217}{251}, -\frac{868}{251}\right).$$

Como $S - R = \frac{5}{251}(13, -9, -1)$, la recta pedida pasa por R y tiene dirección $\vec{n}$:

$$r : (x, y, z) = \left(-\frac{282}{251}, -\frac{172}{251}, -\frac{863}{251}\right) + \lambda(13, -9, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Esta es la recta perpendicular común.

La distancia mínima entre las rectas es la longitud de su perpendicular común. También podemos calcularla con el producto mixto, usando $P = (0, 1, -4) \in r$, $Q = (0, 0, 0) \in s$ y las direcciones $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, 4)$:

$$d(r, s) = \frac{|(Q - P) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|(0, -1, 4) \cdot (13, -9, -1)|}{\sqrt{251}} = \frac{5}{\sqrt{251}}.$$

Conclusión. La distancia mínima es $\frac{5}{\sqrt{251}}$.

Opción A - Ejercicio 3. Sistema homogéneo

Un sistema homogéneo cuadrado tiene soluciones no triviales precisamente cuando su matriz de coeficientes es singular. Calculamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix}, \quad \det A = -(k-3)(2k+5).$$

Por ello, existen soluciones no nulas para $k = 3$ o $k = -\frac{5}{2}$.

Para $k = 3$, reducimos el sistema o resolvemos dos ecuaciones independientes. Se obtiene $x = -\frac{5}{7}z$ e $y = \frac{4}{7}z$. Tomando $z = 7t$ para evitar fracciones:

$$(x, y, z) = t(-5, 4, 7), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Los valores singulares son $k = 3$ y $k = -\frac{5}{2}$; para $k = 3$, las soluciones son $t(-5, 4, 7)$.

Opción A - Ejercicio 4. Relación matricial y potencia

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculamos su cuadrado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Al igualar con $aA + bI$,

$$\begin{pmatrix} a+b & a \\ a & -2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

obtenemos $a = -1$ y $b = 3$. Así, $A^2 = -A + 3I$.

Usamos esta relación para las potencias sin multiplicar sucesivamente las matrices:

$$\begin{aligned} A^4 &= (A^2)^2 = (-A + 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I = -7A + 12I, \\ A^5 &= A(-7A + 12I) = -7A^2 + 12A = 19A - 21I. \end{aligned}$$

Sustituyendo la matriz A , **Conclusión.** $A^5 = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$.

Opción B - Ejercicio 1. Continuidad, cortes y tangente

Para $x > 0$, la función es $f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x}$; para $x \leq 0$, es $f(x) = x + k$.

a) Continuidad. En cada trozo la función es continua en su dominio. Solo hay que imponer continuidad en $x = 0$. Por la derecha,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = 0,$$

ya que $\sqrt{x} \ln x \rightarrow 0$ y $2^x \rightarrow 1$. Como $f(0) = k$, la continuidad requiere $k = 0$. **Conclusión.** La función es continua en $\mathbb{R}$ para $k = 0$.

b) Cortes con los ejes. Con $k = 0$, el tramo $x \leq 0$ es $f(x) = x$ y se anula en $x = 0$. Para $x > 0$, la raíz y el denominador son positivos, así que los ceros proceden de $\ln x = 0$, es decir, $x = 1$. El corte con el eje y se obtiene en $x = 0$. **Conclusión.** Los cortes con el eje x son $(0, 0)$ y $(1, 0)$; con el eje y , $(0, 0)$.

c) Tangente en $x = 1$. Escribimos $q(x) = \sqrt{x} \ln x$, de modo que $f(x) = 2^{-x} q(x)$. Como $q(1) = 0$ y $q'(1) = 1$, la regla del producto da $f(1) = 0$ y $f'(1) = \frac{1}{2}$. La ecuación punto-pendiente resulta

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1).$$

Conclusión. La tangente es $y = \frac{x-1}{2}$.

Opción B - Ejercicio 2. Discusión de un sistema

Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ a & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

El determinante es $\det A = -a(a - 2)$. Si $a \neq 0, 2$, el determinante no se anula y el sistema es SCD. Para $a = 0$, el rango de A es 2 y el de la ampliada también es 2, así que el sistema es SCL. Para $a = 2$, la segunda fila de coeficientes es el doble de la tercera, pero sus términos independientes no cumplen la misma relación ($-2 \neq 2(-2)$); así, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$, y el sistema es SI. **Conclusión.** Es SCD si $a \neq 0, 2$, SCL si $a = 0$ y SI si $a = 2$.

Para $a = 0$, las ecuaciones son $x - z = 0$, $2z = -2$ y $x + z = -2$. De ellas se obtiene $z = -1$, $x = -1$, mientras que y queda libre: **Conclusión.** La familia de soluciones es $(x, y, z) = (-1, t, -1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Opción B - Ejercicio 3. Plano de dos rectas y distancia

Parametrizamos las rectas:

$$r : (x, y, z) = (0, 1, -1) + t(1, 2, -1), \quad s : (x, y, z) = (0, -2, 3) + u(1, 2, -1).$$

Tienen la misma dirección y son distintas, pues el vector entre sus puntos $(0, -3, 4)$ no es proporcional a $(1, 2, -1)$. Por tanto, determinan un plano. Un vector normal es el producto vectorial de la dirección con el vector que une los puntos:

$$(1, 2, -1) \times (0, -3, 4) = (5, -4, -3).$$

Con el punto $(0, 1, -1) \in r$, la ecuación general del plano queda

$$5x - 4(y - 1) - 3(z + 1) = 0.$$

Conclusión. El plano determinado por r y s es $5x - 4y - 3z + 1 = 0$.

Para la distancia de $A = (0, 1, -1)$ a s , usamos un punto $S_0 = (0, -2, 3)$ de la recta y su dirección $\vec{v} = (1, 2, -1)$:

$$d(A, s) = \frac{\| (A - S_0) \times \vec{v} \|}{\| \vec{v} \|}.$$

Como $A - S_0 = (0, 3, -4)$, el producto vectorial es $(5, -4, -3)$, de módulo $5\sqrt{2}$, y $\| \vec{v} \| = \sqrt{6}$. **Conclusión.** La distancia es $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Opción B - Ejercicio 4. Volumen y simetría respecto de un plano

El plano pasa por $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 2, 0)$ y $R = (0, 0, 3)$.

a) Volumen. Los vectores de posición de los tres vértices, junto con el origen, determinan un tetraedro de volumen

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = 1.$$

Conclusión. El volumen es 1 unidad cúbica.

b) Simétrico del origen. Por la forma de interceptos, el plano tiene ecuación $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ y vector normal $\vec{n} = (6, 3, 2)$. El pie H de la perpendicular desde el origen al plano se obtiene con

$$H = O - \frac{6(0) + 3(0) + 2(0) - 6}{6^2 + 3^2 + 2^2} \vec{n} = \frac{6}{49} (6, 3, 2) = \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49} \right).$$

El simétrico O' tiene a H como punto medio de OO' , así que $O' = 2H$. **Conclusión.** El punto simétrico es $O' = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49} \right)$.