MADRID · PAU 2023 · EXTRAORDINARIA

Matemáticas II

8 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

El examen incluye tabla N(0,1) como anexo. Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos. TIEMPO: 90 minutos.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2,5 puntos

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

a) 0,5 puntos

Calcular el determinante de $A^t A$.

b) 0,5 puntos

Calcular el rango de BA en función de b.

c) 0,75 puntos

Calcular B^{-1} para $b = 2$.

d) 0,75 puntos

Para $b = 1$, calcular B^5.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2,5 puntos

Dado el sistema $\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) 1,25 puntos

Discutirlo en función del parámetro k.

b) 0,5 puntos

Resolverlo para $k = 3$.

c) 0,75 puntos

Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

Tu Profe al Rescate

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2,5 puntos

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si } v \geq 3 \end{cases}$$

a) 1 punto

Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) 1,5 puntos

Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serían el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2,5 puntos

Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) 1 punto

Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.

b) 1,5 puntos

Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2,5 puntos

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) 0,25 puntos

Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) 1 punto

Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) 1,25 puntos

Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Tu Profe al Rescate

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2,5 puntos

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$

a) 0,5 puntos

Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) 1 punto

Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) 1 punto

Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2,5 puntos

Sabiendo que $P(A) = 0{,}5$, $P(A|B) = 0{,}625$ y $P(A \cup B) = 0{,}65$, se pide calcular:

a) 1,5 puntos

$P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b) 1 punto

$P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2,5 puntos

El 65% de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) 0,75 puntos

Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) 0,75 puntos

Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) 1 punto

Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

Tu Profe al Rescate