

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2026 · Convocatoria ordinaria

Soluciones completas de las dos opciones de los apartados 1 y 2 y del problema común.

Problema 1 · Ecuación matricial y fertilizante

A) De $4XB + C^tD = I$ aislamos X :

$$X = \frac{1}{4}(I - C^tD)B^{-1}.$$

Con las matrices del enunciado,

$$C^tD = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/40 & -9/40 \\ 1/5 & 3/20 \end{pmatrix}.$$

Para que FC sea idempotente, su cuadrado debe coincidir con la propia matriz. El producto es

$$FC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad (FC)^2 = \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z & z \end{pmatrix}.$$

Igualando entradas, $1+z = 1$ y $z = 0$; ambas condiciones concuerdan.

$$X = \begin{pmatrix} -7/40 & -9/40 \\ 1/5 & 3/20 \end{pmatrix}; \quad FC \text{ es idempotente si } z = 0.$$

B) Sean x e y los litros de NutriMax y BioGrow. Las necesidades mínimas de nutrientes imponen

$$2x + y \geq 8, \quad x + y \geq 6, \quad x + 2y \geq 10, \quad x, y \geq 0.$$

El coste es $C = 5x + 4y$. La intersección de las tres rectas límite es $(2, 4)$ y satisface las tres necesidades exactamente. Su coste es 26 €. Los vértices factibles sobre los ejes son $(10, 0)$ y $(0, 8)$, con costes 50 € y 32 €; ambos superan 26. Así se confirma el mínimo en $(2, 4)$.

$$2 \text{ litros de NutriMax y } 4 \text{ litros de BioGrow; } C_{\min} = 26 \text{ €}.$$

Problema 2 · Valor de mercado y almacenamiento

A) La función es continua en los puntos de cambio $t = 1$ y $t = 2$. En $t = 1$, la continuidad exige $3 = a + 2$, así que $a = 1$. En $t = 2$, la segunda rama vale $5/2$ y

$$2c + \frac{b}{4} = \frac{5}{2}.$$

La condición $g'(3) = 23/27$ en la tercera rama da $c - 2b/27 = 23/27$. Resolviendo el sistema, $b = 2$ y $c = 1$.

Las derivadas de las tres ramas son $2t$, $-1/t^2$ y $1 - 4/t^3$. Por ello, el primer gerente observa crecimiento en $[0, 1]$, el segundo decrecimiento en $(1, 2]$ y el tercero crecimiento en $(2, 4]$; no crece con los tres gerentes. Los cambios de signo muestran un máximo relativo en $t = 1$, $g(1) = 3$, y un mínimo relativo en $t = 2$, $g(2) = 5/2$. En todo $[0, 4]$, el mínimo absoluto es $g(0) = 2$ y el máximo absoluto es $g(4) = 33/8$.

El salario del primer gerente se calcula con la integral en su periodo $[0, 1]$:

$$100000 \int_0^1 (t^2 + 2) dt = 100000 \left[\frac{t^3}{3} + 2t \right]_0^1 = \frac{700000}{3} \text{ €}.$$

$$a = 1, b = 2, c = 1; \quad \min_{\text{abs}} g = 2 \text{ en } 0; \quad \max_{\text{abs}} g = \frac{33}{8} \text{ en } 4; \quad \text{salario} = \frac{700000}{3} \text{ €}.$$

B) El beneficio es ingresos menos gastos:

$$P(x) = I(x) - G(x) = 400x - (4x^2 + 100) = -4x^2 + 400x - 100.$$

Como es una parábola cóncava, el máximo se alcanza en el vértice, $x = -400/(2(-4)) = 50$ terabytes. El beneficio máximo es $P(50) = 9900$.

La eficiencia es el cociente entre ingresos y gastos:

$$E(x) = \frac{I(x)}{G(x)} = \frac{100x}{x^2 + 25}, \quad E'(x) = \frac{100(25 - x^2)}{(x^2 + 25)^2}.$$

Para $x \geq 0$, crece hasta $x = 5$ y decrece después; su máximo es $E(5) = 10$. Por último, elevamos primero la función de gastos al cuadrado y luego integramos:

$$\int_0^2 G(x)^2 dx = \int_0^2 (16x^4 + 800x^2 + 10000) dx = \left[\frac{16x^5}{5} + \frac{800x^3}{3} + 10000x \right]_0^2 = \frac{333536}{15}.$$

$$P_{\max} = 9900 \text{ en } x = 50; \quad E_{\max} = 10 \text{ en } x = 5; \quad \int_0^2 G(x)^2 dx = \frac{333536}{15}.$$

Problema 3 · Formación de los empleados

Sean B, A, M los sucesos «becario», «aprendiz» y «maestro», y S «tiene estudios superiores». La proporción de maestros es $1 - 0,50 - 0,35 = 0,15$. De ellos, el 85% tiene estudios superiores. Si $p = P(S | A)$, la probabilidad total da

$$0,79 = 0,50 \cdot 0,80 + 0,35p + 0,15 \cdot 0,85,$$

de donde $p = 0,75$.

a) $P(A \cap S) = 0,35 \cdot 0,75 = 0,2625 = 21/80$.

b) $P(A \cap S^c) = 0,35 \cdot 0,25 = 0,0875$ y $P(S^c) = 1 - 0,79 = 0,21$. Luego

$$P(A | S^c) = \frac{0,0875}{0,21} = \frac{5}{12}.$$

c) La intersección de «aprendiz o becario» con «estudios superiores o aprendiz» incluye a todos los aprendices y a los becarios con estudios superiores:

$$P((A \cup B) \cap (S \cup A)) = P(A) + P(B \cap S) = 0,35 + 0,50 \cdot 0,80 = 0,75.$$

$$P(A \cap S) = \frac{21}{80}; \quad P(A | S^c) = \frac{5}{12}; \quad P((A \cup B) \cap (S \cup A)) = 0,75.$$