

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Producción e ingresos máximos

Sean x e y las toneladas semanales de P_1 y P_2 . Las disponibilidades de materias primas y mano de obra, y la condición de demanda, se traducen en

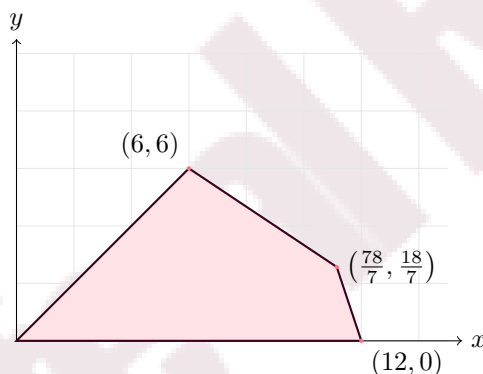
$$2x + 3y \leq 30, \quad 3x + y \leq 36, \quad x + 5y \leq 40, \quad y \leq x, \quad x, y \geq 0.$$

Los ingresos son $I(x, y) = 300x + 350y$. En una región poligonal basta comparar esta función en los vértices factibles. Las intersecciones relevantes son

$$(0, 0), \quad (12, 0), \quad (6, 6), \quad \begin{cases} 2x + 3y = 30, \\ 3x + y = 36 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{78}{7}, \frac{18}{7}\right).$$

La intersección de las dos restricciones de materias primas satisface también las otras restricciones; en los vértices:

(x, y)	$(0, 0)$	$(12, 0)$	$(6, 6)$	$(\frac{78}{7}, \frac{18}{7})$
$I(x, y)$	0	3600	3900	$\frac{29700}{7}$



El mayor ingreso es $\frac{29700}{7}$ euros, que se obtiene fabricando $\frac{78}{7}$ toneladas de P_1 y $\frac{18}{7}$ toneladas de P_2 .

$$P_1 = \frac{78}{7} \text{ t}, \quad P_2 = \frac{18}{7} \text{ t}; \quad I_{\max} = \frac{29700}{7} \text{ €}.$$

Problema 2 · Continuidad, extremos y área

La función es

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1, \\ \frac{6}{x^2 + 1}, & x > 1. \end{cases}$$

Ambas expresiones son continuas en sus intervalos; solo debemos comprobar el punto de unión $x = 1$. Se tiene

$$f(1) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{6}{1+1} = 3,$$

por lo que también es continua en $x = 1$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

Para hallar los extremos derivamos en cada tramo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1, \\ -\frac{12x}{(x^2 + 1)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

En el primer tramo la derivada se anula en $x = 0$: es negativa si $x < 0$ y positiva si $0 < x < 1$, así que hay un mínimo local $f(0) = 2$. En el segundo tramo $f'(x) < 0$, por lo que la función decrece para $x > 1$. Al pasar por $x = 1$, la función pasa de creciente a decreciente; así, $x = 1$ es un máximo local y $f(1) = 3$.

En $[-1, 1]$ la función es $x^2 + 2$, que es positiva. El área con el eje X entre las rectas verticales es, por tanto,

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{14}{3}.$$

Continua en $\mathbb{R}$; mínimo local $(0, 2)$; máximo local $(1, 3)$; $\mathcal{A} = \frac{14}{3}$.

Problema 3 · Actividades extraescolares

Sean D «practica una actividad deportiva» y N «practica una actividad no deportiva». El 25% no realiza ninguna actividad, luego $P(D \cup N) = 0,75$. También $P(D) = 0,55$ y el dato condicional es $P(D | N) = 1/4$.

a) Sea $p = P(N)$. Por la definición de probabilidad condicionada, $P(D \cap N) = p/4$. Aplicamos la fórmula de la unión para encontrar p :

$$0,75 = 0,55 + p - \frac{p}{4} \implies p = \frac{4}{15}, \quad P(D \cap N) = \frac{p}{4} = \frac{1}{15}.$$

b) La probabilidad deportiva ya está dada en el enunciado: $P(D) = 0,55$.

c) Para que fueran independientes debería ser $P(D \cap N) = P(D)P(N)$. Sin embargo,

$$P(D)P(N) = 0,55 \cdot \frac{4}{15} = \frac{11}{75} \neq \frac{1}{15} = P(D \cap N),$$

por lo que los sucesos no son independientes.

$P(D \cap N) = \frac{1}{15}$; $P(D) = 0,55$; D, N no son independientes.

Opción B

Problema 1 · Ecuaciones matriciales

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Agrupamos los términos que contienen X a la izquierda, respetando el orden de los productos:

$$AX - BCX = 3C \implies (A - BC)X = 3C.$$

Primero calculamos BC y la matriz que multiplica a X :

$$BC = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - BC = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A - BC) = 4 \neq 0.$$

La matriz es invertible, así que $X = (A - BC)^{-1}(3C)$. Calculando por separado,

$$(A - BC)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad 3C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix},$$
$$X = \begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

b) La matriz que se debe invertir es

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A^t + B) = 6.$$

Como su determinante no es cero, existe la inversa:

$$(A^t + B)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$X = \begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}; \quad (A^t + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Problema 2 · Deterioro de una máquina

La antigüedad satisface $x \geq 0$ y la función indicada es

$$f(x) = \begin{cases} 15,5 - 1,1x, & 0 \leq x \leq 5, \\ \frac{5x + 45}{x + 2}, & x > 5. \end{cases}$$

a) Cada tramo es continuo en su dominio. En el punto de unión,

$$f(5) = 15,5 - 1,1 \cdot 5 = 10, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \frac{25 + 45}{7} = 10.$$

Los límites laterales coinciden con el valor de la función, de modo que f es continua en $[0, +\infty[$.

b) En el primer tramo $f'(x) = -1,1 < 0$. Para $x > 5$,

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+45)}{(x+2)^2} = -\frac{35}{(x+2)^2} < 0.$$

Por tanto, el número de fotografías por minuto decrece con la antigüedad. Además, si $x > 5$,

$$f(x) < 10 \iff 5x + 45 < 10(x+2) \iff x > 5,$$

lo que demuestra la afirmación.

c) En el segundo tramo podemos escribir

$$f(x) = 5 + \frac{35}{x+2} > 5 \quad (x > 5).$$

En el primer tramo los valores van de 15,5 a 10, también por encima de 5. La función se aproxima a 5 cuando x crece, pero no lo alcanza ni baja de ese valor.

f es continua y decreciente en $[0, +\infty[$; $f(x) > 5$ para toda antigüedad finita.

Problema 3 · Retrasos en los vuelos

Sean E «vuelo procedente del extranjero» y R «vuelo con retraso». Los datos son

$$P(E) = \frac{1}{4}, \quad P(\bar{E}) = \frac{3}{4}, \quad P(R | E) = \frac{1}{3}, \quad P(R | \bar{E}) = \frac{1}{20}.$$

a) Los casos E y $\bar{E}$ son incompatibles y cubren todos los vuelos; por ello sumamos sus probabilidades conjuntas:

$$P(R) = P(E)P(R | E) + P(\bar{E})P(R | \bar{E}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{20} = \frac{29}{240}.$$

b) Para invertir la condición usamos Bayes. La probabilidad de llegar a la hora habiendo venido del extranjero es $P(E \cap \bar{R}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, y $P(\bar{R}) = 1 - 29/240 = 211/240$. Así,

$$P(E | \bar{R}) = \frac{P(E \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{1/6}{211/240} = \frac{40}{211}.$$

c) Es más sencillo usar el complementario de «llega a la hora o es extranjero»: el único caso que queda fuera es un vuelo nacional con retraso.

$$P(\bar{R} \cup E) = 1 - P(\bar{E} \cap R) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{20} = \frac{77}{80}.$$

$$P(R) = \frac{29}{240}; \quad P(E | \bar{R}) = \frac{40}{211}; \quad P(\bar{R} \cup E) = \frac{77}{80}.$$