

Septiembre de 2009 · Convocatoria extraordinaria

Resolvemos los ocho apartados con los datos del enunciado. En cada uno indicamos qué método usamos y comprobamos el resultado.

Bloque 1 · Problema 1.1

La matriz depende del parámetro real α :

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A(\alpha) &= 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \alpha & -6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ \alpha & -6 \end{vmatrix} + (\alpha - 2) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} \\ &= (-18 - 2\alpha) - 2(-24 - 2\alpha) + (\alpha - 2)(4\alpha - 3\alpha) \\ &= \boxed{\alpha^2 + 30}. \end{aligned}$$

Como $\alpha^2 + 30 \geq 30 > 0$, la matriz es invertible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Para cualquier matriz invertible, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. Por tanto, la condición del apartado b) se escribe

$$\det(A(\alpha)^{-1}) = \frac{1}{\alpha^2 + 30} = \frac{1}{66} \implies \alpha^2 = 36 \implies \boxed{\alpha = 6 \text{ o } \alpha = -6}.$$

Ambos valores son reales y hacen que $\det(A^{-1}) = 1/66$.

Bloque 1 · Problema 1.2

Es un sistema homogéneo, así que siempre admite la solución $(0, 0, 0)$. Para saber cuándo es la única, aplicamos el criterio del determinante a la matriz de coeficientes:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \det A(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos:

$$\begin{aligned} \det A(\alpha) &= (3\alpha - 28) - (2\alpha - 20) + (14 - 15) \\ &= \alpha - 9. \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 9$, el determinante de A es distinto de cero: sus tres columnas son independientes y el menor de orden 3 vale $\alpha - 9 \neq 0$. Por tanto,

$$\operatorname{rg}(A) = 3.$$

La matriz ampliada $(A|0)$ contiene ese mismo menor de orden 3 y solo tiene tres filas; así,

$$\operatorname{rg}(A|0) = 3 = \operatorname{rg}(A) = n.$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado (SCD). Como es homogéneo, su única solución es la trivial: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Para $\alpha = 9$, el determinante de A se anula. Veamos los menores de la matriz ampliada. El único menor de orden 3 que puede no contener la columna de ceros es $\det A = 0$; los demás incluyen esa columna y también valen cero. Luego $\operatorname{rg}(A|0) \leq 2$, y también $\operatorname{rg}(A) \leq 2$. En cambio, el menor de orden 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

aparece tanto en A como en $(A|0)$. Por consiguiente,

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|0) = 2 < 3 = n.$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + 4z = 0, \\ 5x + 7y + 9z = 0. \end{cases}$$

Restamos dos veces la primera ecuación de la segunda: $y + 2z = 0$. Tomando $z = t$, resulta $y = -2t$ y, por la primera ecuación, $x = t$. La tercera ecuación se satisface porque $5t - 14t + 9t = 0$. Luego

$$(x, y, z) = t(1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bloque 2 · Problema 2.1

El plano $\pi : x - 2y + 2z + 5 = 0$ tiene vector normal $\vec{n} = (1, -2, 2)$, y el punto es $P = (3, -1, 4)$.

a) Recta por P perpendicular a π . La dirección de una recta perpendicular al plano es el vector normal de este. En forma paramétrica:

$$r : x = 3 + t, \quad y = -1 - 2t, \quad z = 4 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Todos los planos por P perpendiculares a π . Si (a, b, c) es el vector normal de uno de esos planos, la perpendicularidad exige

$$(a, b, c) \cdot (1, -2, 2) = 0 \implies a - 2b + 2c = 0.$$

Tomamos $b = u, c = v$, de modo que $a = 2u - 2v$. El plano por P , escrito en forma general, es

$$(2u - 2v)(x - 3) + u(y + 1) + v(z - 4) = 0.$$

Al desarrollar:

$$(2u - 2v)x + uy + vz - 5u + 2v = 0, \quad (u, v) \neq (0, 0).$$

Los dos parámetros recorren todas las normales no nulas perpendiculares a $\vec{n}$; por eso esta expresión describe todos los planos pedidos.

c) Plano por P, Q perpendicular a π . El vector de dirección $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 1, -5)$. Una normal del plano buscado debe ser perpendicular tanto a $\overrightarrow{PQ}$ como a $\vec{n}$; tomamos

$$\vec{n}' = \vec{n} \times \overrightarrow{PQ} = (8, 1, -3).$$

Se comprueba que $(8, 1, -3) \cdot (1, -2, 2) = 8 - 2 - 6 = 0$. Con esta normal y el punto P :

$$8(x - 3) + (y + 1) - 3(z - 4) = 0 \implies \pi' : 8x + y - 3z - 11 = 0.$$

Además, el plano contiene Q , pues $8(1) + 0 - 3(-1) - 11 = 0$.

Bloque 2 · Problema 2.2

El plano es $\pi : 3x + 2y + 4z - 12 = 0$, con normal $(3, 2, 4)$. Para cualquier plano paralelo suyo, los coeficientes de x, y, z se mantienen:

$$3x + 2y + 4z + d = 0.$$

La distancia entre dos planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es $|d_1 - d_2| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Aquí $d_1 = -12$ y $\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}$. Imponemos la distancia de 5 unidades:

$$\frac{|d + 12|}{\sqrt{29}} = 5 \implies d = -12 \pm 5\sqrt{29}.$$

Por tanto, los dos planos son

$$3x + 2y + 4z - 12 + 5\sqrt{29} = 0, \quad 3x + 2y + 4z - 12 - 5\sqrt{29} = 0.$$

Para hallar los cortes del plano con los ejes, anulamos las otras dos coordenadas:

$$\text{Eje } x : y = z = 0 \Rightarrow 3x - 12 = 0 \Rightarrow A = (4, 0, 0),$$

$$\text{Eje } y : x = z = 0 \Rightarrow 2y - 12 = 0 \Rightarrow B = (0, 6, 0),$$

$$\text{Eje } z : x = y = 0 \Rightarrow 4z - 12 = 0 \Rightarrow C = (0, 0, 3).$$

Calculamos los ángulos con el producto escalar, $\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (|\vec{u}| |\vec{v}|)$.

En **A**: $\vec{AB} = (-4, 6, 0)$, $\vec{AC} = (-4, 0, 3)$, así que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 16$, $|\vec{AB}| = 2\sqrt{13}$, $|\vec{AC}| = 5$. Por tanto,

$$\theta_A = \arccos \left(\frac{16}{10\sqrt{13}} \right) = \arccos \left(\frac{8}{5\sqrt{13}} \right) \approx 63.7^\circ.$$

En **B**: $\vec{BA} = (4, -6, 0)$, $\vec{BC} = (0, -6, 3)$, el producto escalar vale 36 y las longitudes son $2\sqrt{13}$ y $3\sqrt{5}$. Así,

$$\theta_B = \arccos \left(\frac{36}{6\sqrt{65}} \right) = \arccos \left(\frac{6}{\sqrt{65}} \right) \approx 41.9^\circ.$$

En **C**: $\vec{CA} = (4, 0, -3)$, $\vec{CB} = (0, 6, -3)$, su producto escalar es 9 y sus longitudes son 5 y $3\sqrt{5}$. Entonces

$$\theta_C = \arccos \left(\frac{9}{15\sqrt{5}} \right) = \arccos \left(\frac{3}{5\sqrt{5}} \right) \approx 74.4^\circ.$$

Los valores aproximados suman 180.0° , como corresponde a los ángulos interiores de un triángulo.

Bloque 3 · Problema 3.1

Sea $R(x) = f(x)/g(x)$, con $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x - 2)(x^2 + 9)$. El dominio excluye los ceros del denominador. Como $x^2 + 9 > 0$ para todo real, el único cero real del denominador es $x = 2$; por ello, $\text{Dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

En $x = 2$, el numerador vale $f(2) = 26 \neq 0$. Además, $x^2 + 9 \rightarrow 13 > 0$, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} R(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} R(x) = +\infty.$$

La asíntota vertical es $x = 2$. Como el grado del numerador es 2 y el del denominador es 3,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0;$$

la asíntota horizontal es $y = 0$. No hay asíntota oblicua: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} R(x)/x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} R(x) = 0$, que dan la horizontal ya obtenida.

Ahora buscamos una primitiva de R y usamos el dato $H(3) = \pi/3$. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^2 + 12x - 6}{(x - 2)(x^2 + 9)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 9}.$$

Al eliminar denominadores e igualar coeficientes:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x - 6 &= A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x - 2) \\ &= (A + B)x^2 + (C - 2B)x + 9A - 2C, \end{aligned}$$

de donde $A + B = 2$, $C - 2B = 12$ y $9A - 2C = -6$. Resolviendo: $A = 2$, $B = 0$, $C = 12$. Así,

$$\begin{aligned} H(x) &= \int \left(\frac{2}{x - 2} + \frac{12}{x^2 + 9} \right) dx \\ &= 2 \ln |x - 2| + 4 \arctan \left(\frac{x}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

La condición se aplica en el intervalo $(2, \infty)$, que contiene a 3:

$$\frac{\pi}{3} = H(3) = 2 \ln 1 + 4 \arctan 1 + C = \pi + C \implies C = -\frac{2\pi}{3}.$$

La condición fija la constante en el intervalo $x > 2$, que contiene a 3. En el otro intervalo, $x < 2$, la constante puede elegirse independientemente, porque el integrando no está definido en $x = 2$. La familia completa de funciones que satisface el dato es

$$H(x) = \begin{cases} 2 \ln |x - 2| + 4 \arctan \left(\frac{x}{3} \right) + C_-, & x < 2, C_- \in \mathbb{R}, \\ 2 \ln |x - 2| + 4 \arctan \left(\frac{x}{3} \right) - \frac{2\pi}{3}, & x > 2. \end{cases}$$

Bloque 3 · Problema 3.2

La función es $f(x) = 8/(1+x^2)$. Su dominio es $\mathbb{R}$, ya que $1+x^2 \geq 1 > 0$ y el denominador nunca se anula. No tiene asíntotas verticales por esa misma razón. En ambos extremos $f(x) \rightarrow 0$, así que la horizontal es $y = 0$; no hay oblicua porque $\lim f(x)/x = 0$ y $\lim f(x) = 0$.

Derivadas. Aplicamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (1+x^2) - 8 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{16x}{(1+x^2)^2}.$$

Derivamos de nuevo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -16 \left((1+x^2)^{-2} - 4x^2(1+x^2)^{-3} \right) \\ &= \frac{16(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Crecimiento y extremos de f . El denominador de f' es positivo y $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. Probamos $f'(-1) = 4 > 0$ y $f'(1) = -4 < 0$:

Intervalo/punto	Valor de prueba	$\text{sgn}(f')$	Conclusión
$(-\infty, 0)$	$f'(-1) = 4$	+	Crece
0	$f'(0) = 0$	0	Máximo absoluto: $f(0) = 8$
$(0, \infty)$	$f'(1) = -4$	-	Decrece

Los límites $f(x) \rightarrow 0^+$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ confirman que el máximo es absoluto; el ínfimo es 0, pero no se alcanza.

Puntos de inflexión. El denominador de f'' es siempre positivo. Sus ceros se obtienen de $3x^2 - 1 = 0$, luego $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Comprobamos el signo a ambos lados y entre ellos, con $f''(-1) = 4 > 0$, $f''(0) = -16 < 0$, $f''(1) = 4 > 0$:

Intervalo/punto	Valor de prueba	$\text{sgn}(f'')$	Conclusión
$(-\infty, -1/\sqrt{3})$	$f''(-1) = 4$	+	Cóncava hacia arriba
$-1/\sqrt{3}$	$f'' = 0$	0	Punto de inflexión
$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$f''(0) = -16$	-	Cóncava hacia abajo
$1/\sqrt{3}$	$f'' = 0$	0	Punto de inflexión
$(1/\sqrt{3}, \infty)$	$f''(1) = 4$	+	Cóncava hacia arriba

El signo de f'' cambia en ambos puntos. En los dos, $x^2 = 1/3$, así que $f(x) = 8/(1+1/3) = 6$. Los puntos de inflexión son

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 6\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 6\right).$$

Pendiente máxima de las tangentes. La pendiente en cada punto x es $m(x) = f'(x)$; sus extremos se estudian derivando $m'(x) = f''(x)$. La tabla anterior muestra que m crece, decrece y vuelve a crecer, con puntos críticos $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Evaluamos:

$$m\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16/\sqrt{3}}{(4/3)^2} = 3\sqrt{3}, \quad m\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Además, $m(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Por tanto, la mayor pendiente posible es

$$m_{\max} = 3\sqrt{3}, \text{ alcanzada en } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bloque 4 · Problema 4.1

Medimos el tiempo t en horas desde las 7:00 y elegimos un sistema de coordenadas con el este como eje x , el norte como eje y y la posición inicial de B como origen. Las posiciones son

$$A(t) = (150 - 40t, 0) \text{ km}, B(t) = (0, 30t) \text{ km}, t \geq 0.$$

La distancia al cuadrado entre ellas es

$$D^2(t) = |A(t) - B(t)|^2 = (150 - 40t)^2 + (30t)^2.$$

Minimizamos D^2 , que da el mismo instante que minimizar D , pues la raíz cuadrada es creciente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D^2(t) &= 2(150 - 40t)(-40) + 2(30t)(30) \\ &= -12000 + 5000t.\end{aligned}$$

Igualando a cero: $-12000 + 5000t = 0$, así que $t = 12/5 = 2.4$ h. Comprobamos el cambio de signo: $(D^2)'(0) = -12000 < 0$ y $(D^2)'(3) = 3000 > 0$. La distancia primero decrece y luego crece, así que este es el mínimo absoluto para $t \geq 0$.

Intervalo/punto	Valor de prueba	$\text{sgn}((D^2)')$	Conclusión
$0 \leq t < 12/5$	$(D^2)'(0) = -12000$	-	Disminuye
$t = 12/5$	$(D^2)' = 0$	0	Mínimo
$t > 12/5$	$(D^2)'(3) = 3000$	+	Aumenta

El tiempo $12/5$ horas son 2 horas y 24 minutos después de las 7:00:

Estarán más cerca a las 9:24.

En ese instante A está en $(54, 0)$ km y B en $(0, 72)$ km; la distancia mínima es $\sqrt{54^2 + 72^2} = 90$ km.

Bloque 4 · Problema 4.2

Medimos la base b , la altura h y la diagonal d en milímetros. En el instante estudiado, $b = 8 \text{ cm} = 80 \text{ mm}$, $h = 6 \text{ cm} = 60 \text{ mm}$, y ambas dimensiones crecen a 0.2 mm/min . Por Pitágoras,

$$d^2 = b^2 + h^2.$$

Derivamos respecto del tiempo, usando la regla de la cadena:

$$2d \frac{dd}{dt} = 2b \frac{db}{dt} + 2h \frac{dh}{dt} \implies \frac{dd}{dt} = \frac{b \frac{db}{dt} + h \frac{dh}{dt}}{d}.$$

Primero calculamos la diagonal en ese instante: $d = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ mm}$. Sustituimos los datos y sus unidades:

$$\frac{dd}{dt} = \frac{(80 \text{ mm})(0.2 \text{ mm/min}) + (60 \text{ mm})(0.2 \text{ mm/min})}{100 \text{ mm}} = \frac{28 \text{ mm}^2/\text{min}}{100 \text{ mm}} = \boxed{0.28 \text{ mm/min}}.$$

La diagonal crece a 0.28 mm por minuto en el instante indicado.