Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2012--2013 · Convocatoria v5

Soluciones originales de las opciones A y B, redactadas y comprobadas desde los enunciados.

Opción A

Ejercicio 1 · Potencias de matrices y ecuación matricial

a) Calculamos primero A^2, pues $A^3 = A^2 A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 & 144 \\ 144 & 233 \end{pmatrix}.$$

b) En $AX + BC = D$, primero calculamos BC. Como B es 2×3 y C es 3×1, el producto es un vector columna:

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Despejando, $AX = D - BC = \begin{pmatrix} -34 \\ -3 \end{pmatrix}$. La matriz A tiene determinante $10 - 9 = 1$, por lo que es invertible y

$$X = A^{-1}(D - BC), \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -34 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -161 \\ 96 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^3 = \begin{pmatrix} 89 & 144 \\ 144 & 233 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} -161 \\ 96 \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Derivadas

a) Para $f(x) = \dfrac{(x^2-5)^3}{3-x^2}$, el dominio excluye los ceros del denominador: $x \neq \pm\sqrt{3}$. Aplicamos la regla del cociente, con $u = (x^2-5)^3$, $u' = 6x(x^2-5)^2$, $v = 3 - x^2$ y $v' = -2x$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{6x(x^2-5)^2(3-x^2) + 2x(x^2-5)^3}{(3-x^2)^2} = \frac{4x(x^2-5)^2(2-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

b) La función $g(x) = e^{7x}(x - 5x^2)^2$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Aplicamos las reglas del producto y de la cadena:

$$g'(x) = 7e^{7x}(x-5x^2)^2 + 2e^{7x}(x-5x^2)(1-10x) = e^{7x}(x-5x^2)(9-55x).$$

c) En $h(x) = \dfrac{x\ln(1-x^2)}{x-3}$, el logaritmo exige $1 - x^2 > 0$, por lo que su dominio es $(-1, 1)$. Si $u = x\ln(1-x^2)$, entonces $u' = \ln(1-x^2) - \dfrac{2x^2}{1-x^2}$. Con la regla del cociente,

$$h'(x) = \frac{(x-3)\left(\ln(1-x^2) - \frac{2x^2}{1-x^2}\right) - x\ln(1-x^2)}{(x-3)^2} = \frac{-3\ln(1-x^2) - \frac{2x^2(x-3)}{1-x^2}}{(x-3)^2}.$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y teorema de Bayes

Sean A y B las terapias elegidas y N el suceso «no vuelve a fumar». Se tiene $P(A) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}55$, $P(N \mid A) = 0{,}70$ y $P(N \mid B) = 0{,}80$. Las probabilidades conjuntas de cada camino se obtienen multiplicando sus ramas:

$$P(A \cap N) = 0{,}45 \cdot 0{,}70 = 0{,}315, \qquad P(B \cap N) = 0{,}55 \cdot 0{,}80 = 0{,}44.$$

Sumamos esos casos incompatibles para obtener la probabilidad total de no fumar. Para invertir la condición usamos Bayes:

$$P(N) = 0{,}315 + 0{,}44 = 0{,}755, \qquad P(A \mid N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{0{,}315}{0{,}755} = \frac{63}{151} \approx 0{,}4172.$$

Si ha vuelto a fumar, las probabilidades de los caminos son $0{,}45 \cdot 0{,}30 = 0{,}135$ para A y $0{,}55 \cdot 0{,}20 = 0{,}11$ para B. Por tanto,

$$P(A \mid \overline{N}) = \frac{0{,}135}{0{,}135 + 0{,}11} = \frac{27}{49} \approx 0{,}5510.$$

$$\boxed{P(N) = 0{,}755; \qquad P(A \mid N) = \frac{63}{151} \approx 0{,}4172; \qquad P(A \mid \overline{N}) = \frac{27}{49} \approx 0{,}5510.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo para una media y tamaño muestral

La media muestral de las cinco mediciones es

$$\bar{x} = \frac{7{,}92 + 7{,}95 + 7{,}91 + 7{,}90 + 7{,}94}{5} = 7{,}924.$$

Como la desviación típica poblacional es conocida, el intervalo bilateral se calcula con $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Para confianza del 99%, $z_{0{,}995} \approx 2{,}576$, de modo que

$$E = 2{,}576\frac{0{,}2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}2304, \qquad IC_{99\%}(\mu) = 7{,}924 \pm 0{,}2304 \approx (7{,}6936,\ 8{,}1544).$$

El error máximo es la semiamplitud E. Si se desea reducirlo a la mitad sin cambiar σ ni el nivel de confianza, el tamaño muestral debe multiplicarse por cuatro, porque E es inversamente proporcional a $\sqrt{n}$:

$$E_{\text{nuevo}} = \frac{E}{2} \Longrightarrow n_{\text{nuevo}} = 4n = 4 \cdot 5 = 20.$$

$$\boxed{IC_{99\%}(\mu) \approx (7{,}6936,\ 8{,}1544); \quad E \approx 0{,}2304; \quad n_{\text{min}} = 20.}$$

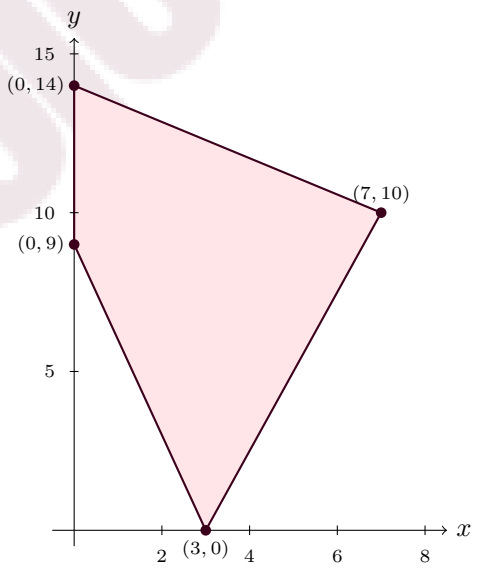
Opción B

Ejercicio 1 · Programación lineal

Las restricciones equivalen a $y \geq 9 - 3x$, $y \geq \dfrac{5x - 15}{2}$, $y \leq 14 - \dfrac{4}{7}x$ y $x \geq 0$. Las dos cotas inferiores se cortan cuando

$$9 - 3x = \frac{5x - 15}{2} \Longrightarrow x = 3, \quad y = 0.$$

En el eje $x = 0$, la región va desde $(0, 9)$ hasta $(0, 14)$. La cota inferior $y = (5x - 15)/2$ y la superior se cortan en $(7, 10)$. Así, los vértices son $(0, 9)$, $(0, 14)$, $(7, 10)$ y $(3, 0)$:



La función objetivo $F(x, y) = 14x + 8y$ es lineal, así que evaluamos sus valores en los vértices:

(x, y)	$(0, 9)$	$(0, 14)$	$(7, 10)$	$(3, 0)$
$F(x, y)$	72	112	178	42

El máximo es 178 en $(7, 10)$. Como ejemplo de otro punto factible, $(0, 10)$ cumple todas las restricciones y da $F(0, 10) = 80$.

$$\boxed{F_{\text{max}} = 178 \text{ en } (7, 10); \qquad (0, 10) \in R \text{ y no es óptimo.}}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, extremos y curvatura

La función está definida en todo $\mathbb{R}$. En el punto de unión $x = 1$, el límite por la izquierda es $1^3 - 1 = 0$, igual al valor de la segunda rama, $-1 + 4 - 3 = 0$; por tanto, es continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x < 1, \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 1. \end{cases}$$

En el primer tramo $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, por lo que la función crece. En el segundo, $f'(x) = 4 - 2x$: crece hasta $x = 2$ y decrece después. En el empalme las pendientes laterales son 3 y 2, de modo que no hay extremo en $x = 1$. En $x = 2$ se alcanza el máximo $f(2) = 1$. No existe mínimo, pues $f(x) \to -\infty$ tanto cuando $x \to -\infty$ como cuando $x \to +\infty$.

La curvatura se determina con la segunda derivada: en el primer tramo $f''(x) = 6x$, y en el segundo $f''(x) = -2$. Por ello, la función es cóncava en $(-\infty, 0)$, convexa en $(0, 1)$ y cóncava en $(1, \infty)$. Cambia de curvatura en $(0, -1)$ y también en el empalme continuo $(1, 0)$, donde hay un punto anguloso.

Continua en $\mathbb{R}$; max $f = 1$ en $x = 2$; no tiene mínimo.

Ejercicio 3 · Sucesos independientes

De $P(A^c) = 0{,}4$ obtenemos $P(A) = 0{,}6$. Como A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Usamos la fórmula de la unión:

$$0{,}8 = P(A \cup B) = 0{,}6 + P(B) - 0{,}6P(B) = 0{,}6 + 0{,}4P(B),$$

de donde $P(B) = 0{,}5$. La independencia implica que conocer A no cambia la probabilidad del complementario de B:

$$P(B^c \mid A) = P(B^c) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

No son incompatibles, ya que $P(A \cap B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3 > 0$.

$P(B) = 0{,}5$; $P(B^c \mid A) = 0{,}5$; A y B no son incompatibles.

Ejercicio 4 · Distribución de medias muestrales e intervalo de proporción

a) Las muestras no ordenadas de tamaño 2 de $\{2, 4, 6\}$ son $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$ y $\{4, 6\}$. Sus medias son 3, 4 y 5, con media global 4. La varianza de estas medias, equiprobables, es

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{(3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2}{3} = \frac{2}{3}, \qquad \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8165.$$

b) La proporción muestral es $\hat{p} = 80/500 = 0{,}16$ y $\hat{q} = 0{,}84$. Para un nivel de confianza del 92%, $z_{0{,}96} \approx 1{,}75$. El margen de error y el intervalo son

$$E = 1{,}75\sqrt{\frac{0{,}16 \cdot 0{,}84}{500}} \approx 0{,}0287, \qquad IC_{92\%}(p) = 0{,}16 \pm 0{,}0287 \approx (0{,}1313,\ 0{,}1887).$$

$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8165$; $IC_{92\%}(p) \approx (0{,}1313,\ 0{,}1887)$.