Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2009--2010 · Examen v3

Se desarrollan las dos opciones del enunciado con sus apartados y representaciones.

Opción A

Ejercicio 1 · Programación lineal: compra de contenedores

Sean x e y los contenedores pedidos a los mayoristas A y B. Las necesidades mínimas y el límite de almacenamiento producen

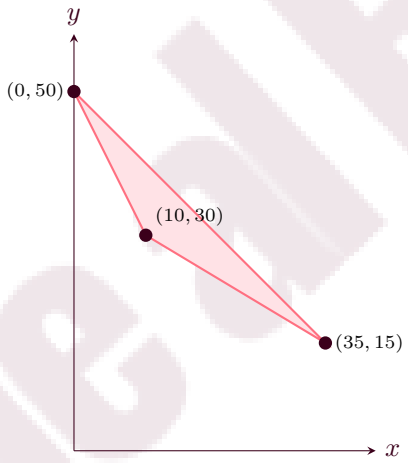
$$2x + y \geq 50, \qquad 3x + 5y \geq 180, \qquad x + y \leq 50, \qquad x, y \geq 0.$$

El coste que queremos minimizar es $C(x, y) = 350x + 550y$. Los vértices factibles se obtienen de las intersecciones de las rectas frontera:

$$2x + y = 50, \quad 3x + 5y = 180 \Longrightarrow (x, y) = (10, 30),$$
$$3x + 5y = 180, \quad x + y = 50 \Longrightarrow (x, y) = (35, 15).$$

Sobre el eje y, las condiciones $x = 0$ y $x + y \leq 50$, junto con $2x + y \geq 50$, dan el tercer vértice $(0, 50)$. El recinto factible es el triángulo de vértices $(0, 50), (10, 30), (35, 15)$.

(x, y)	$(0, 50)$	$(10, 30)$	$(35, 15)$
$C(x, y)$	27500	20000	20500



El menor coste corresponde al punto $(10, 30)$.

$$\boxed{10 \text{ contenedores de A y } 30 \text{ de B}; \qquad C_{\text{min}} = 20\,000 \text{ €}.}$$

Ejercicio 2 · Función cuadrática

a) Determinación de los parámetros. La función $f(x) = 2x^2 + ax + b$ pasa por $(1, 3)$, así que $2 + a + b = 3$. Al tener un extremo en $x = -2$, su derivada se anula ahí:

$$f'(x) = 4x + a, \qquad f'(-2) = 0 \Longrightarrow a = 8.$$

La condición del punto da $2 + 8 + b = 3$, luego $b = -7$.

b) $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$.

Como el coeficiente de x^2 es positivo, la parábola es convexa y su vértice es un mínimo. Su abscisa es $-8/(2 \cdot 2) = -2$, y

$$f(-2) = 2 \cdot 4 - 16 - 10 = -18.$$

Para hallar los ceros resolvemos la ecuación cuadrática:

$$2x^2 + 8x - 10 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1) = 0.$$

$$\boxed{a = 8,\ b = -7 \text{ en el apartado a)}; \quad f_{\text{min}} = -18 \text{ en } x = -2; \quad f(x) = 0 \text{ en } x = -5, 1.}$$

Ejercicio 3 · Operaciones con sucesos

El espacio muestral del dado equilibrado es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Según el enunciado,

$$A = \{5,6\}, \qquad B = \{2,4,6\}, \qquad A^c = \{1,2,3,4\}, \qquad B^c = \{1,3,5\}.$$

Calculamos las operaciones pedidas:

$$A^c \cup B = \{1,2,3,4,6\}, \qquad A \cap B^c = \{5\}, \qquad (A \cap B)^c = \{1,2,3,4,5\}.$$

Los resultados del dado son equiprobables, por lo que la probabilidad de un suceso es su número de elementos dividido entre 6:

$$P(A^c \cap B^c) = P(\{1,3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$\boxed{A^c \cap B^c = \{1,3\}; \quad A^c \cup B^c = \{1,2,3,4,6\}; \quad P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{3}; \quad P(A^c \cup B^c) = \frac{5}{6}.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo para una media

Se conoce $\sigma = 0{,}42$ g/dl, $n = 49$ y $\bar{x} = 6{,}85$ g/dl. Para confianza del 96%, $z_{0{,}98} \approx 2{,}0537$. El intervalo para la media poblacional es $\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$:

$$E = 2{,}0537\frac{0{,}42}{\sqrt{49}} \approx 0{,}12322 \text{ g/dl}, \qquad IC_{96\%}(\mu) \approx (6{,}7268,\ 6{,}9732) \text{ g/dl}.$$

Para confianza del 98%, $z_{0{,}99} \approx 2{,}3263$. El tamaño requerido para que el error sea menor que 0,125 g/dl debe satisfacer

$$2{,}3263\frac{0{,}42}{\sqrt{n}} < 0{,}125 \Longrightarrow n > \left(\frac{2{,}3263 \cdot 0{,}42}{0{,}125}\right)^2 \approx 61{,}10.$$

Se necesitarían al menos 62 individuos. La muestra disponible, de 49, no es suficiente para esa precisión al 98%.

$$\boxed{IC_{96\%}(\mu) \approx (6{,}7268,\ 6{,}9732) \text{ g/dl}; \quad n_{\text{min}} = 62 > 49.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Programación lineal: recinto y valores extremos

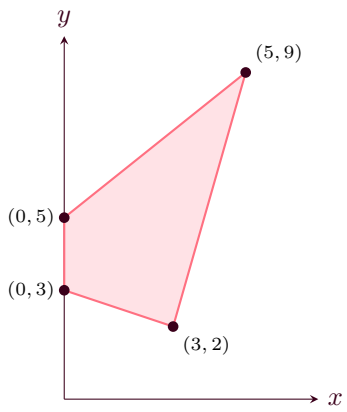
El recinto cumple

$$x + 3y \geq 9, \qquad 4x - 5y + 25 \geq 0, \qquad 7x - 2y \leq 17, \qquad x, y \geq 0.$$

Sus vértices se obtienen intersectando las fronteras y comprobando las demás desigualdades:

$$(0,3), \qquad (0,5), \qquad (5,9), \qquad (3,2).$$

Por ejemplo, $(0,3)$ y $(0,5)$ son las intersecciones factibles con el eje y; $(5,9)$ satisface $4x - 5y + 25 = 0$ y $7x - 2y = 17$, mientras que $(3,2)$ satisface $x + 3y = 9$ y $7x - 2y = 17$.



La función lineal $F(x,y) = 2x - y + 6$ alcanza sus extremos en los vértices:

(x,y)	$(0,3)$	$(0,5)$	$(5,9)$	$(3,2)$
$F(x,y)$	3	1	7	10

$$\boxed{F_{\text{min}} = 1 \text{ en } (0,5); \qquad F_{\text{max}} = 10 \text{ en } (3,2).}$$

Ejercicio 2 · Derivadas y asíntotas

a) Derivadas. La función f está definida para $x \neq 0$, por el término $1/x^2$. Derivamos por separado cada sumando:

$$f(x) = \left(\frac{2-5x}{3}\right)^2 + \frac{1-2x}{x^2}, \qquad f'(x) = -\frac{10(2-5x)}{9} + \frac{2(x-1)}{x^3}.$$

La función $g(x) = (3x+2)^2 \ln(1+x^2)$ tiene dominio $\mathbb{R}$, ya que $1+x^2 > 0$. Aplicando la regla del producto y la derivada del logaritmo:

$$g'(x) = 6(3x+2)\ln(1+x^2) + (3x+2)^2 \frac{2x}{1+x^2}.$$

b) Asíntotas y cortes de h. El dominio de $h(x) = \frac{1+2x}{x-2}$ excluye $x = 2$. Al dividir,

$$h(x) = 2 + \frac{5}{x-2}.$$

El numerador no se anula en $x = 2$, y los límites laterales son

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2^+} h(x) = +\infty,$$

por lo que $x = 2$ es asíntota vertical. Además, $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 2$, así que $y = 2$ es horizontal. El corte con el eje X cumple $1 + 2x = 0$, esto es, $(-1/2, 0)$; con el eje Y, $h(0) = -1/2$, punto $(0, -1/2)$.

$$\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad h:\ x=2 \text{ vertical},\ y=2 \text{ horizontal}; \quad \text{cortes } (-\tfrac{1}{2}, 0),\ (0, -\tfrac{1}{2}).}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y teorema de Bayes

Sean R el suceso «hay robo» y A «suena la alarma». Se conocen $P(R) = 0{,}08$, $P(A \mid R) = 0{,}98$ y $P(A \mid R^c) = 0{,}03$. En cada rama multiplicamos para obtener la probabilidad conjunta. **a)** La alarma no suena si hubo robo con fallo del sistema o si no hubo robo y no se activa por error:

$$P(A^c) = P(R)P(A^c \mid R) + P(R^c)P(A^c \mid R^c) = 0{,}08 \cdot 0{,}02 + 0{,}92 \cdot 0{,}97 = 0{,}894.$$

b) Si suena la alarma, queremos la probabilidad de que no haya robo. Usamos Bayes para invertir la condición:

$$P(R^c \mid A) = \frac{P(R^c \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}92 \cdot 0{,}03}{0{,}08 \cdot 0{,}98 + 0{,}92 \cdot 0{,}03} = \frac{69}{265} \approx 0{,}2604.$$

$$\boxed{P(A^c) = 0{,}894; \qquad P(R^c \mid A) = \frac{69}{265} \approx 0{,}2604.}$$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para la media

La afirmación del agente es que la media no baja de 5 kg. Contrastar esa hipótesis requiere una alternativa de cola izquierda:

$$H_0 : \mu \geq 5, \qquad H_1 : \mu < 5.$$

Con $\sigma = 0{,}25$, $n = 20$ y $\bar{x} = 4{,}8$, el estadístico referido al valor frontera $\mu_0 = 5$ es

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{4{,}8 - 5}{0{,}25/\sqrt{20}} \approx -3{,}578.$$

Para $\alpha = 0{,}01$, el valor crítico de cola izquierda es $-2{,}326$. La región crítica es $z < -2{,}326$, o, de forma equivalente,

$$\bar{x} < 5 - 2{,}326\frac{0{,}25}{\sqrt{20}} \approx 4{,}870 \text{ kg}.$$

Como $-3{,}578 < -2{,}326$ y $4{,}8 < 4{,}870$, rechazamos H_0. Hay evidencia estadística suficiente, al 1%, para afirmar que el peso medio es inferior a 5 kg.

$$\boxed{\text{Se rechaza } H_0 \text{ al 1\%; hay evidencia de que } \mu < 5 \text{ kg}.}$$