

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

a es un parámetro real.

- Discutir el sistema en función del parámetro a . (6 puntos)
- Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es:
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{array} \right)$$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = 2a(a+2) + 1 + 2(a+1) - a - (a+1)(a+2) - 4 = \\ &= 2a^2 + 4a + 1 + 2a + 2 - a - (a^2 + 3a + 2) - 4 = 2a^2 + 5a - 1 - a^2 - 3a - 2 = a^2 + 2a - 3 \\ a^2 + 2a - 3 &= 0; \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $a \neq -3$ y 1

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\text{En } A, \quad \left. \begin{array}{l} |-2| = -2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\text{En } A', \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 2 + 4 = 11 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$, luego el sistema es incompatible.

Si $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\text{En } A, \left. \begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\text{En } A', \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 + 1 + 2 - 6 - 2 = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < 3$ (n° de incógnitas), luego el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, **si $a \neq -3$ y 1 , el sistema es compatible determinado;**

si $a = -3$, el sistema es incompatible;

si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

b) El sistema es compatible indeterminado para $a = 1$ y el menor de orden 2 no nulo de A corresponde a las ecuaciones 1^a y 2^a y a las incógnitas y y z .

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} 2y + z = -1 - 2x \\ y + 2z = 1 - x \end{cases}$. Sabemos que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

Resolviendo por Cramer,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1-2x & 1 \\ 1-x & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2-4x-1+x}{3} = \frac{-3-3x}{3} = -1-x$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1-2x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}}{3} = \frac{2-2x+1+2x}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Las soluciones del sistema cuando es compatible indeterminado son: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

- a) La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. (6 puntos)
 b) El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. (4 puntos)

Solución:

a) Calculemos $M = (A - \alpha I)^2$.

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

$$(A - \alpha I)^2 = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1 - 2 & \alpha + \alpha - 2 & 2\alpha + 2 - 6 + 2\alpha \\ \alpha + \alpha - 2 & 1 + \alpha^2 - 2 & 2\alpha + 2 - 6 + 2\alpha \\ -\alpha - 1 + 3 - \alpha & -1 - \alpha + 3 - \alpha & -2 - 2 + (3 - \alpha)^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} & & -4 + 9 - 6\alpha + \alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } M = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix}$$

b) El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Para que M sea una matriz nula todos sus elementos deben ser nulos.

$$\begin{cases} \alpha^2 - 1 = 0 & \rightarrow \alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ 2\alpha - 2 = 0 & \rightarrow 2\alpha = 2 \rightarrow \alpha = 1 \\ 4\alpha - 4 = 0 & \rightarrow 4\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 1 \\ -2\alpha + 2 = 0 & \rightarrow -2\alpha = -2 \rightarrow \alpha = 1 \\ \alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 & \rightarrow \alpha = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 \\ \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, todos los elementos de la matriz M son nulos cuando $\alpha = 1$.

Solución: $\alpha = 1$.

Problema 3. Dados los puntos $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ y $C = (-1, 0, 0)$:

- Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B . (3 puntos)
- Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C . (4 puntos)
- Calcular la distancia del punto A al plano π . (3 puntos)

Solución:

a) ¿recta r ? / r contiene a los puntos A y B .

De la recta r conocemos $\begin{cases} \text{punto } B(1, 2, 3) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-1, 3, 3) \end{cases}$

La ecuación continua de r : $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}$

A partir de ella obtenemos su ecuación implícita:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} \\ \frac{x-1}{-1} = \frac{z-3}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-3 = -y+2 \\ 3x-3 = -z+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 3x+z-6=0 \end{cases}$$

Solución: la ecuación implícita de la recta r es $\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 3x+z-6=0 \end{cases}$.

b) ¿Plano π ? / $\pi \perp r$ y $C \in \pi$

Representamos por $\vec{n}_\pi$ el vector perpendicular al plano π .

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1, 3, 3)$

La ecuación del plano π será: $-x + 3y + 3z + D = 0$

Como el punto $C(-1, 0, 0) \in \pi \rightarrow -(-1) + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + D = 0$; $1 + D = 0$; $D = -1$

Luego $\pi: -x + 3y + 3z - 1 = 0$ o bien $x - 3y + 3z + 1 = 0$

Solución: la ecuación del plano pedido es $x - 3y + 3z + 1 = 0$.

c) ¿ $d(A, \pi)$? $A = (2, -1, 0)$ y $\pi: x - 3y + 3z + 1 = 0$.

$$d(A, \pi) = \frac{|2 - 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{19}} = \frac{6}{\sqrt{19}} \cong 1.3765$$

Solución: $d(A, \pi) = \frac{6}{\sqrt{19}} \text{ u.l.} \cong 1.3765 \text{ u.l.}$

Problema 4. Dada la recta $r: (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(-1,-1,2)$, y el plano $\pi: 5x + my + z = 2$:

- a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m . (6 puntos)
 b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (4 puntos)

Solución:

a) Posición relativa de r y π en función de m .

A partir de la ecuación vectorial de la recta r escribimos la paramétrica $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

Sustituyendo el valor de x, y, z de r en la ecuación del plano π

$5(1 - \lambda) + m(1 - \lambda) + 2\lambda = 0$, en esta ecuación la incógnita es λ y m es un parámetro.

$$5 - 5\lambda + m - m\lambda + 2\lambda = 0$$

$$5 - 3\lambda + m - m\lambda = 2$$

$$-3\lambda - m\lambda = 2 - 5 - m$$

$$(-3 - m)\lambda = -3 - m$$

Estudiamos la ecuación final, $-3 - m = 0 \rightarrow m = -3$

Si $m = -3$, la ecuación anterior queda $0\lambda = 0 \rightarrow 0 = 0$ que es una identidad; por tanto la ecuación tendría infinitas soluciones y esto quiere decir que la recta está contenida en el plano.

Si $m \neq -3 \rightarrow -3 - m \neq 0 \rightarrow$ la solución de la ecuación sería $\lambda = \frac{-3 - m}{-3 - m} = 1$; por tanto la ecuación tiene una única solución y esto quiere decir que la recta y el plano se cortan en un punto.

Solución:

si $m = -3$, $r \subset \pi$

si $m \neq -3$, r y π se cortan en un punto.

b) Para $m = 1$, ¿plano π' ? $r \subset \pi'$ y $\pi' \perp \pi$

Representamos por $\vec{n}_\pi$ el vector perpendicular al plano π , $\vec{n}_\pi(5,1,1)$.

Como $\pi' \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ es director de π'

Como $r \subset \pi' \rightarrow \begin{cases} \text{el punto de } r \quad (1,1,0) \in \pi' \\ \vec{v}_\pi(-1,-1,2) \text{ es director de } \pi' \end{cases}$

Entonces del plano π' tenemos un punto y dos vectores directores, la ecuación del plano π' la obtenemos calculando:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x-1) \cdot 3 - (y-1) \cdot 11 + z \cdot (-4) = 0$$

$$3x - 3 - 11y + 11 - 4z = 0 \rightarrow 3x - 11y - 4z + 8 = 0$$

Solución: la ecuación del plano π' es $3x - 11y - 4z + 8 = 0$.

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$.

- a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)
- b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)
- c) Obtener $\int f(x) dx$. (4 puntos)

Solución:

a)

$$x = -\frac{1}{2} \text{ es discontinuidad evitable de } f(x) \text{ si } \begin{cases} a) \text{ No existe } f\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ y} \\ b) \text{ Existe } \lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) \end{cases}$$

$$a) f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{No existe } f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

El cálculo realizado anteriormente indica que $-\frac{1}{2}$ es raíz del numerador y denominador, por lo que podremos simplificar la expresión de $f(x)$.

$$-2x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-1-3}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \end{cases} \rightarrow -2x^2 + x + 1 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-5+3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases} \rightarrow -2x^2 + x + 1 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 2)$$

$$\text{Entonces } f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{-2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{-2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 2)} = \frac{-(x - 1)}{x + 2} = \frac{-x + 1}{x + 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{-x + 1}{x + 2} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{-\frac{1}{2} + 2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1 \rightarrow \text{Existe } \lim_{x \rightarrow -1/2} f(x)$$

Hemos comprobado las dos condiciones por tanto $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = -\frac{1}{2}$.

b) Monotonía de $f(x)$.

En el apartado anterior hemos obtenido las raíces del denominador de $f(x)$. Por tanto sabemos que

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}.$$

También hemos simplificado la expresión de $f(x)$ que será la que utilicemos para obtener $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{-x+1}{x+2}, \quad f'(x) = \frac{-1(x+2) - (-x+1)1}{(x+2)^2} = \frac{-x-2+x-1}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

Como el denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que es un número negativo. Por tanto $f'(x)$ es negativa en su dominio.

$f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R} - \left\{-2, \frac{-1}{2}\right\}$.

c) $\int f(x) dx$

Para el cálculo de la integral utilizamos la expresión simplificada de $f(x) = \frac{-x+1}{x+2}$

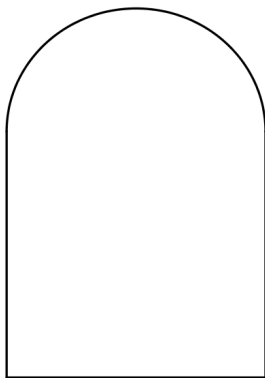
Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{-x+1}{x+2} = \frac{-x-2+2+1}{x+2} = \frac{-x-2}{x+2} + \frac{3}{x+2} = -1 + \frac{3}{x+2}$$

$$\text{Luego, } \int \frac{-x+1}{x+2} dx = \int \left(-1 + \frac{3}{x+2}\right) dx = \int (-1) dx + \int \frac{3}{x+2} dx = -x + 3 \ln|x+2| + C$$

$$\text{Finalmente, } \int f(x) dx = -x + 3 \ln|x+2| + C$$

Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

- Calcular el área de la ventana en función de su anchura x . (3 puntos)
- Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)
- Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

Solución:

La anchura de la ventana es x , la altura de la parte rectangular y , el radio del semicírculo superior es $x/2$.

	El perímetro de la ventana es de 20m. La longitud del semicírculo es: $\pi \frac{x}{2}$. El perímetro de la ventana es: $x + 2y + \frac{\pi}{2}x$ Como hay que obtener el área de la ventana en función de x, despejemos y: $x + 2y + \frac{\pi}{2}x = 20; \quad 2y = 20 - x - \frac{\pi}{2}x; \quad 2y = 20 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x$ $y = \frac{20 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x}{2} = \frac{20 - \left(\frac{2 + \pi}{2}\right)x}{2} = 10 - \frac{2 + \pi}{4}x$
--	---

a) Área de la ventana,

Área de la ventana = Área del rectángulo (xy) + Área del semicírculo,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= x \left(10 - \frac{2 + \pi}{4}x \right) + \frac{\pi \left(\frac{x}{2} \right)^2}{2} = 10x - \frac{2 + \pi}{4}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} = 10x - \frac{2 + \pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 = 10x - \left(\frac{2 + \pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right)x^2 = \\
 &= 10x - \left(\frac{4 + 2\pi - \pi}{8} \right)x^2 = 10x - \frac{4 + \pi}{8}x^2
 \end{aligned}$$

Como x e y son longitudes, $x, y > 0$ (si alguna es 0 no hay ventana), por tanto $10 - \frac{2 + \pi}{4}x > 0$,

$$10 > \frac{2 + \pi}{4}x, \quad 40 > (2 + \pi)x, \quad x < \frac{40}{2 + \pi} \cong 7.7797$$

Finalmente, el área de la ventana en función de su anchura, x , es

$$A(x) = 10x - \frac{4 + \pi}{8}x^2 \quad x \in \left(0, \frac{40}{2 + \pi} \right) \quad x \text{ en metros.}$$

b) Dimensiones de la ventana que permita la máxima entrada de luz.

Buscamos el área máxima.

$$A'(x) = 10 - \frac{4+\pi}{8} 2x = 10 - \frac{4+\pi}{4} x$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow 10 - \frac{4+\pi}{4} x = 0 \rightarrow 10 = \frac{4+\pi}{4} x \rightarrow x = \frac{40}{4+\pi} \cong 5'60009 \in \left(0, \frac{40}{2+\pi}\right)$$

Como $A'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo, es una recta de pendiente negativa, entonces a la izquierda de su raíz es positiva y a la derecha decreciente.

En $x = \frac{40}{4+\pi}$ hay un máximo local y como $A(x)$ a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente, este máximo local es el absoluto.

$$\text{Para } x = \frac{40}{4+\pi}, \quad y = 10 - \frac{2+\pi}{4} \frac{40}{4+\pi} = 10 - \frac{10(2+\pi)}{4+\pi} = 10 - \frac{20+10\pi}{4+\pi} = \frac{40+10\pi-20-10\pi}{4+\pi} = \frac{20}{4+\pi}$$

Por tanto, las dimensiones de la ventana que permite la máxima entrada de luz son:

$$\text{parte rectangular} \left\{ \begin{array}{l} \text{base } \frac{40}{4+\pi} \text{ m.} \\ \text{altura } \frac{20}{4+\pi} \text{ m.} \end{array} \right. \quad \text{y semicírculo superior de radio } \frac{20}{4+\pi} \text{ m.}$$

c) Valor del área máxima.

$$A(x) = 10x - \frac{4+\pi}{8} x^2$$

$$\begin{aligned} \text{para } x = \frac{40}{4+\pi} \rightarrow A\left(\frac{40}{4+\pi}\right) &= 10 \frac{40}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8} \left(\frac{40}{4+\pi}\right)^2 = \frac{400}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8} \frac{1600}{(4+\pi)^2} = \frac{400}{4+\pi} - \frac{200}{4+\pi} = \\ &= \frac{200}{4+\pi} \cong 28'005 \end{aligned}$$

El área máxima mide: $\frac{200}{4+\pi} \text{ m}^2 \cong 28'005 \text{ m}^2$.

Problema 7. Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

- Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? (5 puntos)
- Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Nombrando los sucesos:

V = extraer bola verde

R = extraer bola roja

A = extraer bola amarilla

- a) Extraer dos bolas con devolución. Probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo.

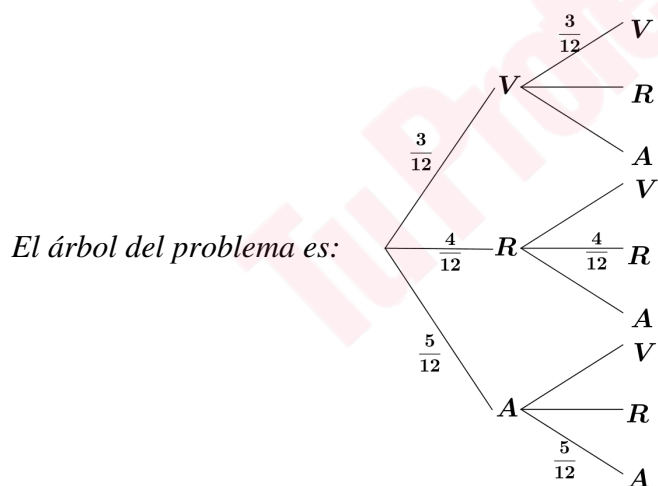
La urna del problema es:

3V
4R
5A

Como la extracción se realiza con devolución

$$P(V) = \frac{3}{12}$$

$$P(R) = \frac{4}{12}$$

$$P(A) = \frac{5}{12}$$


$$P(\text{mismo color}) = \frac{3}{12} \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \frac{4}{12} + \frac{5}{12} \frac{5}{12} = \frac{50}{144} = \frac{25}{72} \cong 0'3472$$

La probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo es $\frac{25}{72}$ o 0'3472.

Que los colores de las bolas extraídas sean distintos es el suceso contrario al anterior, por tanto:

$$P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \frac{25}{72} = \frac{47}{72} \cong 0'6528$$

La probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean distintos es $\frac{47}{72}$ o 0'6528.

b) Se extraen tres bolas al mismo tiempo. Probabilidad de que las tres sean de distinto color.

Extraer tres bolas a la vez es como extraer tres bolas sin devolución.

Las tres bolas son de distinto color en los siguientes resultados:

$$V R A \quad P(V R A) = \frac{3}{12} \frac{4}{11} \frac{5}{10} = \frac{60}{1320}$$

$$V A R \quad P(V A R) = \frac{3}{12} \frac{5}{11} \frac{4}{10} = \frac{60}{1320}$$

$$R V A \quad P(R V A) = \frac{4}{12} \frac{3}{11} \frac{5}{10} = \frac{60}{1320}$$

$$R A V \quad P(R A V) = \frac{4}{12} \frac{5}{11} \frac{3}{10} = \frac{60}{1320}$$

$$A V R \quad P(A V R) = \frac{5}{12} \frac{3}{11} \frac{4}{10} = \frac{60}{1320}$$

$$A R V \quad P(A R V) = \frac{5}{12} \frac{4}{11} \frac{3}{10} = \frac{60}{1320}$$

$$\text{Por lo que, } P(\text{bolas de distinto color al extraer tres bolas}) = 6 \frac{60}{1320} = \frac{3}{11} \cong 0'2727$$

Si se extraen tres bolas al mismo tiempo, la probabilidad de que las tres sean de distinto color es $\frac{3}{11}$ o 0'2727.

Problema 8. Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

- La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. (4 puntos)
- Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. (6 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

I = móvil procede de la 1ª planta

II = móvil procede de la 2ª planta

C = móvil correcto

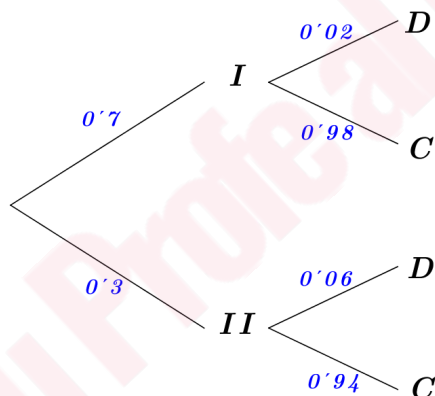
D = móvil defectuoso

De los datos del problema, $P(I) = 0,7 \rightarrow P(II) = 1 - 0,7 = 0,3$

En la 1ª planta $P(D) = 0,02 \rightarrow P(C) = 0,98$

En la 2ª planta $P(D) = 0,06 \rightarrow P(C) = 0,94$

El árbol del problema es:



- La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.

$$P(II \cap D) = 0,3 \cdot 0,06 = 0,018$$

La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso es 0,018.

- Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

$$P\left(\frac{I}{D}\right) = \frac{P(I \cap D)}{P(D)} = \frac{0,7 \cdot 0,02}{0,7 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,06} = \frac{7}{16} = 0,4375$$

Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción es 0,4375.