

Problema 1. A. Esta semana una chica ha consumido 1.470 megabytes de datos de su móvil conectándose a redes sociales, a periódicos y a la universidad. La chica ha pasado 10 horas conectada a redes sociales, 4 horas conectada a periódicos y 6 horas conectada a la universidad. Se sabe que en una hora de conexión a redes sociales se consume un 20% más de megabytes que en una hora de conexión a periódicos. Se sabe también que en una hora de conexión a periódicos se consume 30 megabytes más que en una hora de conexión a la universidad. ¿Cuántos megabytes consume una hora de conexión a redes sociales?; ¿cuántos una hora de conexión a periódicos?; ¿cuántos una hora de conexión a la universidad?

(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Solución:

Llamando: $x = \text{MB que consume 1 h de conexión a redes sociales}$
 $y = \text{MB que consume 1 h de conexión a periódicos}$
 $z = \text{MB que consume 1 h de conexión a la universidad}$

Del enunciado del problema obtenemos:

“ha consumido 1.470 MB. La chica ha pasado 10 horas conectada a redes sociales, 4 horas conectada a periódicos y 6 horas conectada a la universidad”, $10x + 4y + 6z = 1470$

“en una hora de conexión a redes sociales se consume un 20% más de megabytes que en una hora de conexión a periódicos”, $x = 1,2y$

“en una hora de conexión a periódicos se consume 30 megabytes más que en una hora de conexión a la universidad”, $y = 30 + z$; $y - z = 30$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} 10x + 4y + 6z = 1470 \\ x = 1,2y \\ y - z = 30 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x de la 2ª ecuación en la primera:

$$\begin{cases} 10 \cdot 1,2y + 4y + 6z = 1470 \\ y - z = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16y + 6z = 1470 \\ y - z = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16y + 6z = 1470 \\ 6 \cdot (y - z) = 180 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $22y = 1650$; $y = \frac{1650}{22} = 75$

Sustituyendo este valor de y en la 2ª y 3ª ecuación del sistema inicial:

$$x = 1,2 \cdot 75 = 90$$

$$75 - z = 30; \quad 75 - 30 = z; \quad z = 45$$

Solución:

Una hora de conexión a redes sociales consume 90 MB, a periódicos 75 MB y a la universidad 45 MB.

Problema 1. B. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcula el producto $A C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C . (0,75 puntos)
 b) Calcula la inversa de la matriz $B - A$. (1,25 puntos)
 c) Obtén la matriz X que verifica la ecuación $X^t A + C = X^t B$, siendo X^t la matriz traspuesta de X . (1,5 puntos)

Solución:

a) *Calcula el producto $A C^t$.*

$$A C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $A C^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

b) *Calcula la inversa de la matriz $B - A$.*

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos $|B - A|$, $|B - A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 + 1 - 3 = 3 \neq 0 \rightarrow \exists (B - A)^{-1}$

Cálculo de la inversa de $(B - A)$,

$$(B - A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (B - A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Solución: $(B-A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

c) ¿Matriz X ? / X verifica la ecuación $X^t A + C = X^t B$.

Efectuemos operaciones en la expresión anterior (teniendo en cuenta que conocemos $(B-A)^{-1}$).

$C = X^t B - X^t A$; $C = X^t (B-A)$; multiplicando por $(B-A)^{-1}$ por la derecha,

$C (B-A)^{-1} = X^t (B-A) (B-A)^{-1}$; $C (B-A)^{-1} = X^t I$; $C (B-A)^{-1} = X^t \rightarrow X^t = C (B-A)^{-1}$.

$$X^t = C (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 11 & -5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -2/3 & 5/3 \\ 11/3 & -5/3 & 5/3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y \quad X = (X^t)^t = \begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 2. A. El valor de una empresa (en millones de euros) se expresa en función del tiempo t (en años) según la función $B(t) = -t^2 + 12t - 11$, para t entre 2 y 9.

- a) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor máximo y cuál es este valor?
(0'75 puntos)
- b) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor mínimo y cuál es este valor?
(0'75 puntos)
- c) ¿En qué periodo el valor de la empresa es superior a 24 millones de euros?
(1'25 puntos)
- d) Calcula la siguiente integral:
(0'75 puntos)

$$\int_3^8 B(t) dt$$

Solución:

$$B(t) = -t^2 + 12t - 11, \quad t \in [2, 9]$$

- a) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor máximo y cuál es este valor?
Máximo de $B(t)$.

$$B'(t) = -2t + 12; \quad -2t + 12 = 0; \quad -2t = -12; \quad t = \frac{-12}{-2} = 6 \in [2, 9]$$

Calculemos el signo de $B'(t)$ a la izquierda y derecha de $t = 6$.

$B'(5) = -2 \cdot 5 + 12 = 2 > 0$ A la izquierda de $t = 6$ la función es creciente y a la derecha decreciente, por
 $B'(7) = -2 \cdot 7 + 12 = -2 < 0$ tanto en $t = 6$ hay un máximo local que es el absoluto porque no hay otros
 posibles máximos o mínimos locales.

$$\text{Para } t = 6, \quad B(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 11 = 25$$

Solución: la empresa alcanza su valor máximo al cabo de 6 años y este valor será de 25 millones de euros.

- b) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor mínimo y cuál es este valor?

En el apartado anterior hemos obtenido que la función sólo tiene un máximo local. Por tanto, el mínimo se alcanzará en alguno de los extremos del intervalo $[2, 9]$.

$$B(2) = -2^2 + 12 \cdot 2 - 11 = 9$$

$$B(9) = -9^2 + 12 \cdot 9 - 11 = 16$$

El mínimo se alcanza a los 2 años y es 9.

Solución: la empresa alcanza su valor mínimo al cabo de 2 años y este valor será de 9 millones de euros.

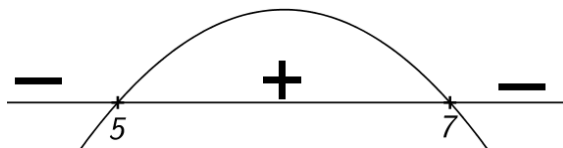
- c) ¿En qué periodo el valor de la empresa es superior a 24 millones de euros?

$$¿t? / B(t) > 24$$

$$\text{Debemos resolver la inecuación: } -t^2 + 12t - 11 > 24; \quad -t^2 + 12t - 11 - 24 > 0; \quad -t^2 + 12t - 35 > 0$$

$$-t^2 + 12t - 35 = 0; \quad t = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-1)(-35)}}{2(-1)} = \frac{-12 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-12 \pm 2}{-2} = \begin{cases} t_1 = \frac{-12+2}{-2} = 5 \\ t_2 = \frac{-12-2}{-2} = 7 \end{cases}$$

Como la inecuación es de 2º grado con coeficiente de t^2 negativo y raíces 5 y 7, gráficamente es:



Por tanto la solución de la inecuación es el intervalo (5, 7).

Solución: el valor de la empresa es superior a 24 millones de euros en el periodo (5, 7).

d) $\int_3^8 B(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_3^8 (-t^2 + 12t - 11) dt &= \left[-\frac{t^3}{3} + 12\frac{t^2}{2} - 11t \right]_3^8 = \left[\left(-\frac{8^3}{3} + 12\frac{8^2}{2} - 11 \cdot 8 \right) - \left(-\frac{3^3}{3} + 12\frac{3^2}{2} - 11 \cdot 3 \right) \right] = \\ &= \frac{376}{3} - 12 = \frac{340}{3} \end{aligned}$$

Solución: $\int_3^8 B(t) dt = \frac{340}{3}.$

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0,5 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0,5 puntos)

Solución:

a) Dominio,

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 27}{0^2 + 0 - 2} = \frac{27}{2} = 13,5 \rightarrow (0, 13,5)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = 0; \quad 3x^2 - 27 = 0; \quad 3x^2 = 27; \quad x^2 = \frac{27}{3}; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \rightarrow (-3, 0) \text{ y } (3, 0)$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 1\} \text{ y}$$

los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0, 13,5)$, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3,$$

la asíntota horizontal es $y = 3$.

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que las posibles a.v. son $x = -3$ y $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{3(-2)^2 - 27}{(-2)^2 + (-2) - 2} = \frac{-15}{0} = \infty \rightarrow x = -2 \text{ es a.v.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{3 \cdot 1^2 - 27}{1^2 + 1 - 2} = \frac{-24}{0} = \infty \rightarrow x = 1 \text{ es a.v.}$$

La asíntota horizontal es $y = 3$ y las asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 1$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

$$f'(x) = \frac{6x \cdot (x^2 + x - 2) - (3x^2 - 27) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{6x^3 + 6x^2 - 12x - (6x^3 + 3x^2 - 54x - 27)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{3x^2 + 42x + 27}{(x^2 + x - 2)^2}$$

Obtenemos las raíces del numerador y denominador,

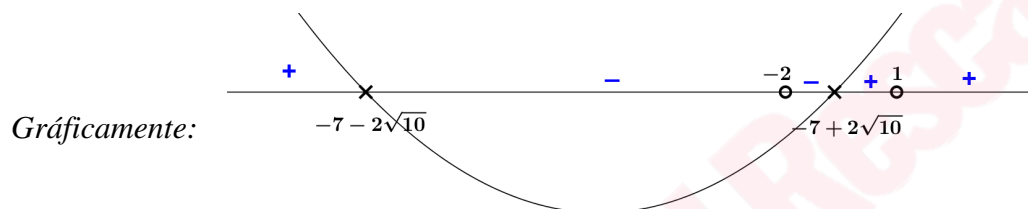
$$3x^2 + 42x + 27 = 0 \rightarrow x = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27}}{2 \cdot 3} = \frac{-42 \pm 12\sqrt{10}}{6} = -7 \pm 2\sqrt{10} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = -7 + 2\sqrt{10} \cong -0'6754 \\ x_2 = -7 - 2\sqrt{10} \cong -13'3246 \end{cases}$$

$$(x^2 + x - 2)^2 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} \quad x = -2 \text{ y } 1 \notin \text{Dom } f(x)$$

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo.

El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y con raíces las obtenidas.



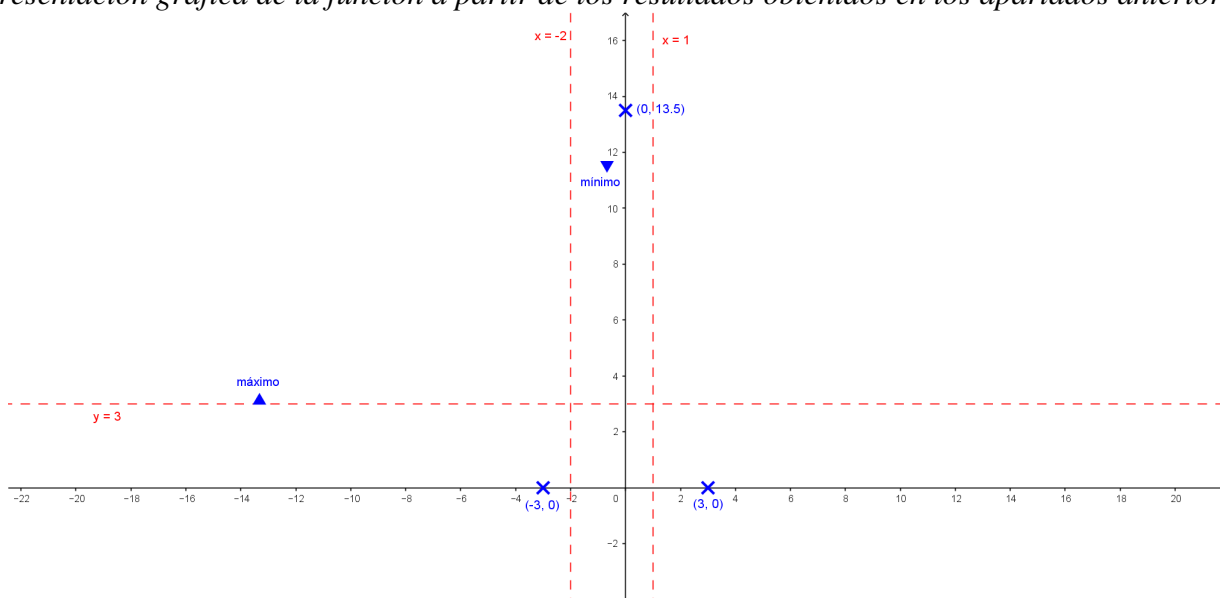
Por tanto, $f(x)$ es **creciente** en $(-\infty, -7 - 2\sqrt{10}) \cup (-7 - 2\sqrt{10}, 1) \cup (1, +\infty)$
y **decreciente** en $(-7 - 2\sqrt{10}, -2) \cup (-2, -7 + 2\sqrt{10})$.

Del estudio de la monotonía deducimos que tiene un **máximo local** en $x = -7 - 2\sqrt{10}$ y un **mínimo local** en $x = -7 + 2\sqrt{10}$.

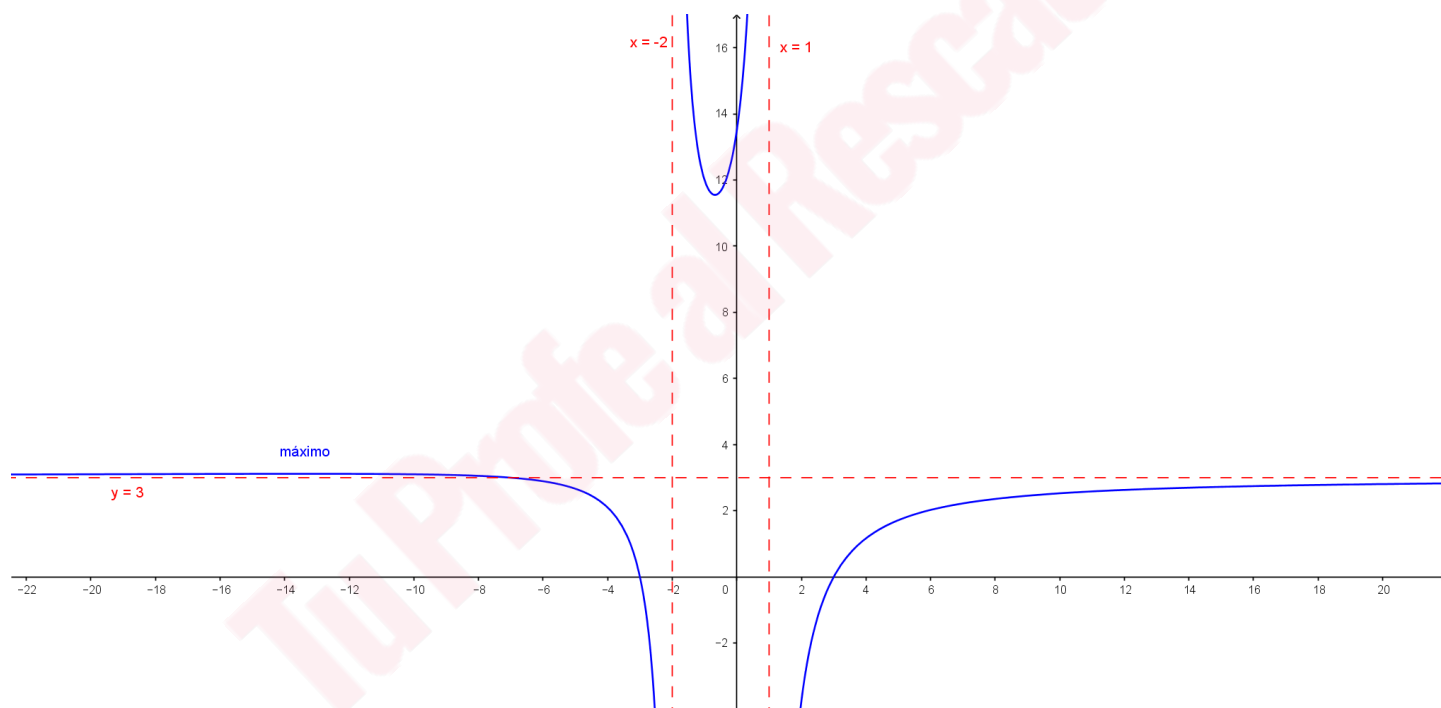
$x = -7 - 2\sqrt{10} \cong -13'3246$, $f(x) = \frac{3(-13'3246)^2 - 27}{(-13'3246)^2 + (-13'3246) - 2} \cong 3'1170$, $f(x)$ tiene un **máximo local** en $(-13'3246, 3'1170)$.

$x = -7 + 2\sqrt{10} \cong -0'6754$, $f(x) = \frac{3(-0'6754)^2 - 27}{(-0'6754)^2 + (-0'6754) - 2} \cong 11'5497$, $f(x)$ tiene un **mínimo local** en $(-0'6754, 11'5497)$.

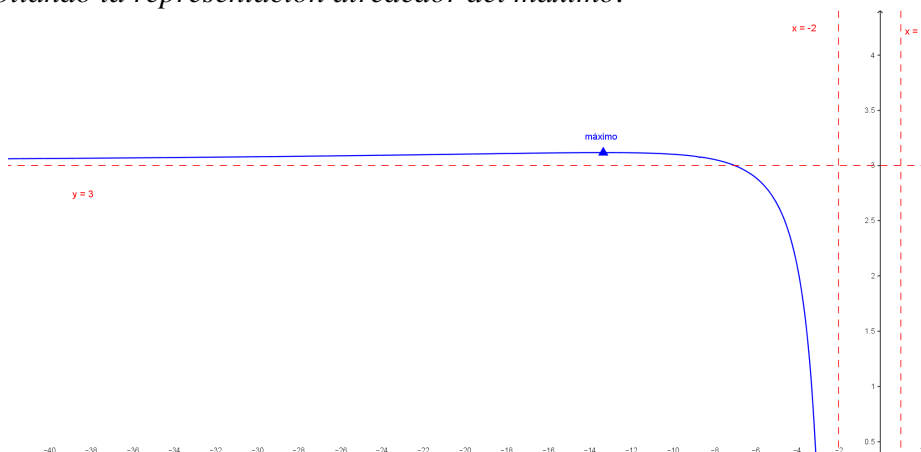
d) Representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.



Teniendo en cuenta los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. La representación será:



Ampliando la representación alrededor del máximo:



Tu Profe al Rescate

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Una empresa de mantenimiento de automóviles evalúa los coches haciéndoles dos controles; si los dos salen negativos entonces el coche se califica como no adecuado y si los dos salen positivos entonces se califica como adecuado. Sin embargo, si uno de los controles sale positivo y el otro negativo, entonces se le hace un tercer control; si este sale positivo la calificación es de coche adecuado, y en caso contrario la calificación es de no adecuado. Se sabe que una determinada marca pasa correctamente el primer control con una probabilidad de 0,8 y que la probabilidad de que pase el control disminuye en 0,1 cada vez que se le hace un control. Seleccionamos al azar un coche de esta marca para su evaluación.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el coche seleccionado sea calificado como adecuado? (1 punto)
- Si se sabe que el coche seleccionado ha sido calificado como adecuado, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado el primer control? (1 punto)
- Si se sabe que al coche seleccionado solo se le han hecho dos controles, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido calificado como adecuado? (1 punto)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

C_1 = El coche supera el primer control

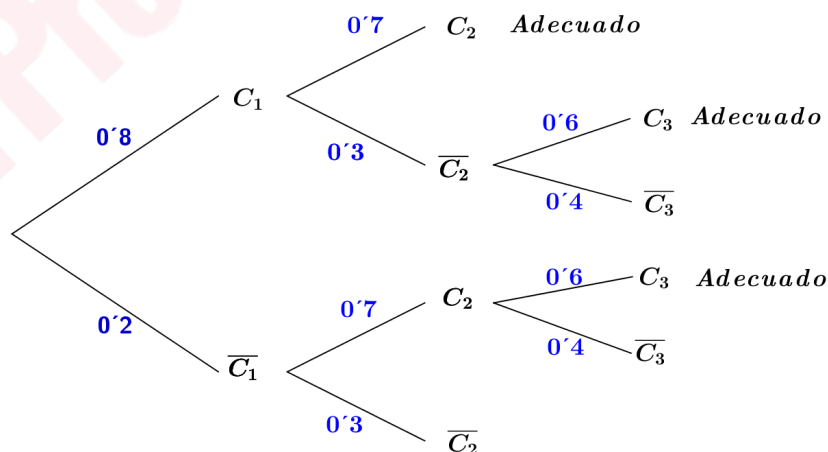
C_2 = El coche supera el segundo control

C_3 = El coche supera el tercer control

De los datos del enunciado,

“se sabe que una determinada marca pasa correctamente el primer control con una probabilidad de 0,8 y que la probabilidad de que pase el control disminuye en 0,1 cada vez que se le hace un control”, entonces $P(C_1) = 0,8$, $P(C_2) = 0,7$ y $P(C_3) = 0,6$ y $\{P(\overline{C_1}) = 1 - P(C_1) = 1 - 0,8 = 0,2$, $P(\overline{C_2}) = 0,3$, $P(\overline{C_3}) = 0,4\}$.

El árbol del problema queda:



- ¿Cuál es la probabilidad de que el coche seleccionado sea calificado como adecuado?

La probabilidad pedida es: $P(C_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap \overline{C_2} \cap C_3) + P(\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3)$

$$P(\text{ser calificado como adecuado}) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,788$$

Solución: la probabilidad de que el coche seleccionado sea calificado como adecuado es de 0,788.

b) Si se sabe que el coche seleccionado ha sido calificado como adecuado, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado el primer control?

La probabilidad pedida es: $P(C_1/\text{adecuado})$

$$P(C_1/\text{adecuado}) = \frac{P(C_1 \cap \text{adecuado})}{P(\text{adecuado})} = \frac{0'8 \cdot 0'7 + 0'8 \cdot 0'3 \cdot 0'6}{0'788} = \frac{176}{197} \cong 0'8934$$

Solución: la probabilidad pedida es 0'8934.

c) Si se sabe que al coche seleccionado solo se le han hecho dos controles, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido calificado como adecuado?

La probabilidad pedida es: $P(\text{adecuado}/\text{sólo dos controles})$

$$P(\text{adecuado}/\text{sólo dos controles}) = \frac{P(\text{adecuado} \cap \text{sólo dos controles})}{P(\text{sólo dos controles})} = \frac{0'8 \cdot 0'7}{0'8 \cdot 0'7 + 0'2 \cdot 0'3} = \frac{28}{31} \cong 0'9032$$

Solución: la probabilidad pedida es 0'9032.

Tu Profecia al Rescate