

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2009

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Invertibilidad y potencias

La matriz es

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Invertibilidad de M . Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero:

$$\det M = 2m(m - 1).$$

Conclusión. M es invertible para $m \neq 0, 1$.

b) Invertibilidad de M^{25} . Se cumple $\det(M^{25}) = (\det M)^{25}$, por lo que la potencia es invertible exactamente para los mismos valores del parámetro. **Conclusión.** M^{25} es invertible si $m \neq 0, 1$.

c) Inversa para $m = -1$. Sustituyendo el parámetro, el determinante vale 4. Aplicando la fórmula de la inversa:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. Esta es la matriz inversa para $m = -1$.

Opción A - Ejercicio 2. Continuidad y derivabilidad

Para $x \neq 0$, la función es $f(x) = \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2}$ y $f(0) = -\frac{1}{2}$. Cerca de cero, el desarrollo de Taylor del logaritmo es

$$\ln(1+ax) = ax - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^2).$$

Así,

$$f(x) = \frac{a-b}{x} - \frac{a^2}{2} + o(1).$$

Para que el límite sea finito es necesario que $a = b$. Entonces el límite vale $-a^2/2$; la continuidad exige que sea igual a $f(0) = -1/2$, es decir, $a^2 = 1$. **Conclusión.** La función es continua en cero para $(a, b) = (1, 1)$ o $(a, b) = (-1, -1)$.

Para $a = b = 1$, calculamos la derivada en cero usando su definición:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}. \end{aligned}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital al último cociente; la derivada del numerador es $\frac{x^2}{1+x}$ y la del denominador, $3x^2$. Por tanto,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x)} = \frac{1}{3}.$$

Conclusión. Para $a = b = 1$, la función sí es derivable en cero y $f'(0) = \frac{1}{3}$.

Opción A - Ejercicio 3. Intersección perpendicular de rectas

En forma paramétrica,

$$r : (x, y, z) = t(1, 2, a), \quad s : (x, y, z) = (3, 0, 3) + u(b, 1, -1).$$

Para que se corten, igualamos coordenadas:

$$t = 3 + bu, \quad 2t = u, \quad at = 3 - u.$$

Además, para que el corte sea perpendicular, el producto escalar de sus direcciones debe ser cero:

$$(1, 2, a) \cdot (b, 1, -1) = b + 2 - a = 0.$$

Al resolver estas condiciones conjuntamente se obtiene $t = 1$, $u = 2$, $a = 1$ y $b = -1$. El punto de intersección es $(1, 2, 1)$ y las direcciones son perpendiculares. **Conclusión.** Las rectas se cortan perpendicularmente únicamente para $a = 1$ y $b = -1$.

Opción A - Ejercicio 4. Planos paralelos a distancia fijada

Todo plano paralelo a π tiene el mismo vector normal, por lo que se escribe $2x - y + 2z + D = 0$. La distancia entre dos planos paralelos con ecuaciones $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ es

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Aquí $D_1 = 1$, $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$ y pedimos $d = 3$:

$$\frac{|D - 1|}{3} = 3 \implies D = 10 \text{ o } D = -8.$$

Conclusión. Los planos buscados son $2x - y + 2z + 10 = 0$ y $2x - y + 2z - 8 = 0$.

Opción B - Ejercicio 1. Tangentes y teorema del valor medio

a) **Pendiente de la tangente igual a 1.** La función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Derivando con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Imponemos que la pendiente sea 1:

$$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 1 \iff x^2(x^2-3) = 0.$$

Los valores son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$. Al calcular las ordenadas:

$$f(0) = 0, \quad f(\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusión. Los puntos son $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

b) **Tangente en $x = 0$.** Como $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, la ecuación punto-pendiente es

$$y - 0 = 1(x - 0).$$

Conclusión. La tangente es $y = x$.

c) **Existencia de c .** La función g es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$, por lo que se puede aplicar el teorema del valor medio. Existe $c \in (0, 2)$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1.$$

Conclusión. Existe al menos un $c \in (0, 2)$ con $g'(c) = 1$.

Opción B - Ejercicio 2. Simetría de una recta respecto de un plano

La recta está en forma paramétrica

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, -1, 1).$$

Reflejamos un punto y el vector director respecto del plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, cuyo normal es $\vec{n} = (1, 1, -2)$ y $\|\vec{n}\|^2 = 6$.

Para el punto $R = (1, 0, 0)$, el valor $1 + 0 - 0 + 1 = 2$ da su distancia orientada multiplicada por $\|\vec{n}\|$. Su simétrico es

$$R' = R - \frac{2 \cdot 2}{6} \vec{n} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

La dirección reflejada se obtiene quitando el doble de la componente normal:

$$\vec{d}' = (1, -1, 1) - 2 \frac{(1, -1, 1) \cdot (1, 1, -2)}{6} (1, 1, -2) = (1, -1, 1) + \frac{2}{3} (1, 1, -2) \sim (5, -1, -1).$$

Conclusión. La recta simétrica es $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) + t(5, -1, -1)$.

Opción B - Ejercicio 3. Sistema homogéneo

Un sistema homogéneo cuadrado tiene soluciones no triviales cuando el determinante de su matriz es cero:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = (\lambda - 5)(\lambda - 1).$$

Conclusión. Hay soluciones distintas de cero para $\lambda = 1$ o $\lambda = 5$.

Para $\lambda = 5$, las ecuaciones son

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 0, \\ 5x - y + 2z = 0, \\ x - 5y + 2z = 0. \end{cases}$$

Se comprueba que el vector $(-1, 1, 3)$ satisface las tres ecuaciones. Como el rango es 2, todas las soluciones son sus múltiplos:

$$(x, y, z) = t(-1, 1, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $\lambda = 5$, la familia solución es $t(-1, 1, 3)$.

Opción B - Ejercicio 4. Ecuación matricial

Como A y B son invertibles, de $AXB = A + B$ despejamos

$$X = A^{-1}(A + B)B^{-1}.$$

Calculamos por separado:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primero,

$$A^{-1}(A + B) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{8}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos después por B^{-1} :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{8}{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La matriz que verifica $AXB = A + B$ es $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$.