

Se resuelven una ecuación integral, un límite trigonométrico, una circunferencia, sistemas, optimización y operaciones matriciales.

Opción A - Ejercicio 1

Una primitiva de $f(x) = 2 + x - x^2$ es $F(x) = 2x + x^2/2 - x^3/3$. La condición del enunciado da

$$F(2) - F(\alpha) = \frac{9}{2}, \quad \frac{10}{3} - F(\alpha) = \frac{9}{2}.$$

Por tanto $F(\alpha) = -7/6$, y al multiplicar la ecuación por 6:

$$2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 12\alpha - 7 = 0 = (\alpha + 1)^2(2\alpha - 7).$$

Las raíces son -1 y $7/2$; como se exige $\alpha < 2$, resulta

$$\boxed{\alpha = -1}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Usamos los límites notables $\sin x/x \rightarrow 1$, $\sin u/u \rightarrow 1$ y $\cos u \rightarrow 1$ cuando los argumentos tienden a cero. Reescribimos

$$\frac{x \sin x}{\tan(x^2)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2).$$

Cada factor tiende a 1 cuando $x \rightarrow 0$, de modo que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\tan(x^2)} = 1}.$$

Opción A - Ejercicio 3

El centro de una circunferencia que pasa por $(0, 2)$ y $(0, -2)$ debe estar en la mediatriz de ese segmento, que es el eje x . Escribimos el centro como $(h, 0)$. Al igualar las distancias a $(0, 2)$ y $(-1, 1)$:

$$h^2 + 4 = (h + 1)^2 + 1 \implies h = 1.$$

El radio cumple $r^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Por tanto, su ecuación es

$$(x - 1)^2 + y^2 = 5.$$

Para que $(3, m)$ pertenezca a la circunferencia,

$$(3 - 1)^2 + m^2 = 5 \implies m^2 = 1,$$

y los valores son $m = \pm 1$. **Opción A - Ejercicio 4**

Las matrices de coeficientes y ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & a \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a & b \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras filas son independientes. Para que haya infinitas soluciones, la tercera debe ser combinación lineal de ellas. Si $R_3 = uR_1 + vR_2$, las dos primeras componentes dan

$$3u + 4v = 2, \quad 2u + v = -3,$$

de donde $u = -14/5$ y $v = 13/5$. La tercera componente y el término independiente deben respetar la misma combinación:

$$a = -5u - 2v = \frac{44}{5}, \quad b = u + 3v = 5.$$

El menor de las dos primeras filas y columnas 1 y 2 vale $-5 \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 2$. Para estos valores también $\text{rg}(A^*) = 2 < 3$, así que el sistema es SCI. Tomando $z = t$:

$$(x, y, z) = \left(1 - \frac{t}{5}, -1 + \frac{14t}{5}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función es $f(x) = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$. Para que haya un punto de inflexión en $(-2, 12)$ se necesitan $f(-2) = 12$ y $f''(-2) = 0$. La pendiente de la tangente es -10 , pues $10x + y + 8 = 0$ equivale a $y = -10x - 8$. Por tanto,

$$f(-2) = 12, \quad f'(-2) = -10, \quad f''(-2) = 0.$$

Como $f' = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f'' = 6ax + 2b$, al sustituir $x = -2$:

$$-8a + 4b - 2c = 12, \quad 12a - 4b + c = -10, \quad -12a + 2b = 0.$$

Resolviendo el sistema:

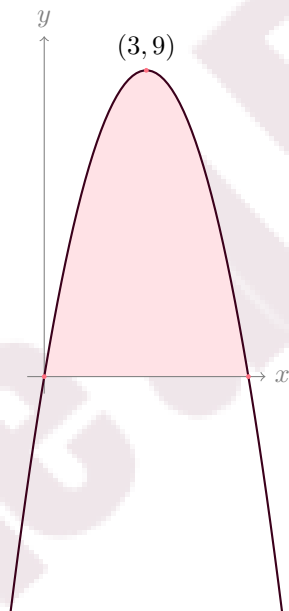
$$a = 1, \quad b = 6, \quad c = 2.$$

Opción B - Ejercicio 2

Para $\alpha > 0$, la curva $y = \alpha x - x^2 = x(\alpha - x)$ está sobre el eje x entre sus cortes $x = 0$ y $x = \alpha$. El área encerrada es

$$S(\alpha) = \int_0^\alpha (\alpha x - x^2) dx = \left[\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha^3}{6}.$$

Imponemos $S = 36$: $\alpha^3 = 216$, luego $\alpha = 6$. La parábola resultante es $y = 6x - x^2$, con cortes $(0, 0)$ y $(6, 0)$ y vértice $(3, 9)$.



Opción B - Ejercicio 3

La recta pasa por $Q_0 = (1, -2, -1)$ y tiene vector director $\vec{d} = (1, 2, -3)$, pues

$$(x, y, z) = (1, -2, -1) + t(1, 2, -3).$$

El punto más cercano a $A = (1, -1, 1)$ es su proyección ortogonal $H = Q_0 + t_H \vec{d}$, con

$$t_H = \frac{(A - Q_0) \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} = \frac{(0, 1, 2) \cdot (1, 2, -3)}{1 + 4 + 9} = -\frac{2}{7}.$$

Al sustituir,

$$H = \left(\frac{5}{7}, -\frac{18}{7}, -\frac{1}{7} \right).$$

Opción B - Ejercicio 4

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante:

$$\det A = -b^2 + 4b - 3 = -(b-1)(b-3).$$

Luego existe inversa exactamente cuando $b \neq 1, 3$. Para $b = 2$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$