Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2015--2016 · Modelo 2

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Programación lineal

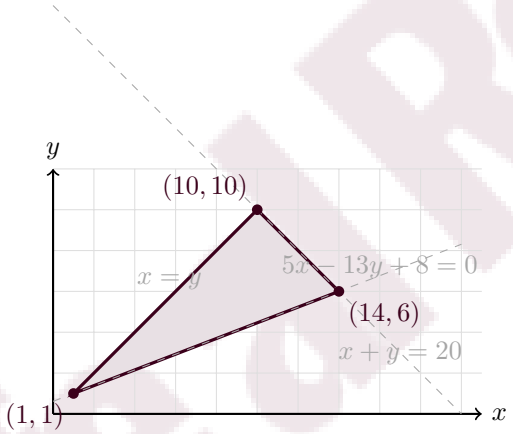
La región factible viene dada por

$$x + y \le 20, \qquad x - y \ge 0, \qquad 5x - 13y + 8 \le 0.$$

Para hallar sus vértices, calculamos las intersecciones de las rectas frontera. De $x - y = 0$ se obtiene $y = x$; al combinarla con $x + y = 20$ resulta $(10, 10)$. Con $5x - 13y + 8 = 0$ y $y = x$ se obtiene $x = 1$, luego $(1, 1)$. Por último, resolvemos la intersección de $x + y = 20$ con $5x - 13y + 8 = 0$:

$$y = 20 - x, \qquad 5x - 13(20 - x) + 8 = 0 \implies 18x = 252, \quad x = 14, \quad y = 6.$$

Los tres puntos satisfacen las desigualdades; delimitan la región triangular. La gráfica muestra sus fronteras y vértices:



b) Para comprobar si $(3, 2{,}5)$ es factible, sustituimos sus coordenadas en las tres restricciones:

$$3 + 2{,}5 = 5{,}5 \le 20, \qquad 3 - 2{,}5 = 0{,}5 \ge 0,$$

$$5 \cdot 3 - 13 \cdot 2{,}5 + 8 = 15 - 32{,}5 + 8 = -9{,}5 \le 0.$$

Se cumplen todas, por lo que el punto pertenece a la región factible.

c) Una función lineal alcanza sus valores extremos en los vértices de una región poligonal, aunque puede alcanzar el mismo valor en todo un lado. Evaluamos $F(x, y) = x - y + 6$ en los tres vértices:

(x, y)	$(1, 1)$	$(10, 10)$	$(14, 6)$
$F(x, y)$	6	6	14

El máximo es 14 en $(14, 6)$. En el lado que une $(1, 1)$ y $(10, 10)$ se cumple $x = y$, así que $F = 6$ en todos sus puntos; ese es el mínimo.

$$\boxed{F_{\text{máx}} = 14 \text{ en } (14, 6); \qquad F_{\text{mín}} = 6 \text{ en todo el lado } x = y \text{ entre } (1, 1) \text{ y } (10, 10).}$$

Ejercicio 2 · Derivadas, recta tangente y asíntotas

a) Para $f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3$, usamos la regla del producto y, al derivar la potencia, la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(3x^3 + 5x)^3 + (x^2 - 1)\,3(3x^3 + 5x)^2(9x^2 + 5) \\ &= (3x^3 + 5x)^2\big(2x(3x^3 + 5x) + 3(x^2 - 1)(9x^2 + 5)\big) \\ &= (3x^3 + 5x)^2(33x^4 - 2x^2 - 15). \end{aligned}$$

Para $g(x)=\dfrac{\ln(3x)}{e^{2x}}=\ln(3x)e^{-2x}$, el logaritmo exige $3x>0$, es decir, $x>0$. Aplicamos de nuevo producto y cadena:

$$g'(x)=\frac{1}{x}e^{-2x}-2\ln(3x)e^{-2x}=\frac{\frac{1}{x}-2\ln(3x)}{e^{2x}},\qquad x>0.$$

b) La recta tangente en $x=1$ tiene pendiente $h'(1)$ y pasa por $(1,h(1))$. Derivamos $h(x)=\dfrac{3x+6}{2x+1}$ mediante la regla del cociente:

$$h'(x)=\frac{3(2x+1)-2(3x+6)}{(2x+1)^2}=-\frac{9}{(2x+1)^2}.$$

Como $h(1)=3$ y $h'(1)=-1$, la ecuación punto-pendiente es

$$y-3=-(x-1)\quad\Longrightarrow\quad y=-x+4.$$

c) El denominador se anula en $x=-\frac{1}{2}$ y el numerador allí vale $\frac{9}{2}\neq 0$. Por tanto, hay una asíntota vertical en $x=-\frac{1}{2}$; de hecho, los límites laterales son $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha. En el infinito, como numerador y denominador son de primer grado, el cociente de sus coeficientes principales da

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+6}{2x+1}=\frac{3}{2},$$

por lo que $y=\frac{3}{2}$ es asíntota horizontal en ambos extremos. Al existir esta asíntota horizontal, no hay oblicua.

$$\boxed{f'(x)=(3x^3+5x)^2(33x^4-2x^2-15);\quad g'(x)=\frac{\frac{1}{x}-2\ln(3x)}{e^{2x}};\quad y_{\text{tangente}}=-x+4;\quad x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{2}.}$$

Ejercicio 3 · Sucesos independientes

Sean V el suceso «tener problemas visuales» y A el suceso «tener problemas auditivos». De los 250 estudiantes,

$$P(V)=\frac{50}{250}=\frac{1}{5},\qquad P(A)=\frac{20}{250}=\frac{2}{25}.$$

Como ambos sucesos son independientes, la probabilidad de que ocurran a la vez es el producto de sus probabilidades:

$$\textbf{a)}\quad P(V\cap A)=P(V)P(A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{25}=\frac{2}{125}=0{,}016.$$

Para no tener ninguno de los dos problemas, deben ocurrir simultáneamente los sucesos complementarios. Estos también son independientes:

$$\textbf{b)}\quad P(V^c\cap A^c)=P(V^c)P(A^c)=\frac{4}{5}\cdot\frac{23}{25}=\frac{92}{125}=0{,}736.$$

La condición «si no tiene problemas visuales» pide $P(A\mid V^c)$. Por independencia, conocer que no ocurre V no modifica la probabilidad de A:

$$\textbf{c)}\quad P(A\mid V^c)=P(A)=\frac{2}{25}=0{,}08.$$

$$\boxed{P(V\cap A)=\frac{2}{125};\quad P(V^c\cap A^c)=\frac{92}{125};\quad P(A\mid V^c)=\frac{2}{25}.}$$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para la media

Sea μ el diámetro medio de las estrellas de mar de la región. La sospecha que se desea contrastar es $\mu\leq 11{,}7$ cm; buscamos evidencia muestral para la alternativa $\mu>11{,}7$. Planteamos

$$H_0:\mu\leq 11{,}7,\qquad H_1:\mu>11{,}7.$$

La población es normal y la desviación típica conocida es $\sigma=\sqrt{2{,}25}=1{,}5$ cm. Para $n=10$, bajo el valor frontera $\mu_0=11{,}7$, la media muestral tipificada es

$$Z=\frac{\bar{X}-11{,}7}{1{,}5/\sqrt{10}}\sim N(0,1).$$

La media observada es

$$\bar{x}=\frac{12{,}5+11{,}8+13{,}1+14{,}3+11{,}7+12{,}6+12{,}7+12{,}1+13{,}5+11{,}5}{10}=12{,}58\text{ cm}.$$

En un contraste de cola derecha se rechaza H_0 cuando $Z > z_{1-\alpha}$. Equivalentemente, se rechaza cuando $\bar{x} > 11{,}7 + z_{1-\alpha}\dfrac{1{,}5}{\sqrt{10}}$.

a) Para $\alpha = 0{,}05$, $z_{0{,}95} \approx 1{,}645$. La región de rechazo en términos de la media muestral es

$$\bar{X} > 11{,}7 + 1{,}645\frac{1{,}5}{\sqrt{10}} \approx 12{,}481 \text{ cm}.$$

Como $12{,}58 > 12{,}481$, la media observada cae en la región de rechazo. Se rechaza la sospecha al 5%: la muestra aporta evidencia de que el diámetro medio supera $11{,}7$ cm.

b) Para $\alpha = 0{,}03$, $z_{0{,}97} \approx 1{,}881$, de modo que la región de rechazo es

$$\bar{X} > 11{,}7 + 1{,}881\frac{1{,}5}{\sqrt{10}} \approx 12{,}592 \text{ cm}.$$

Ahora $12{,}58 < 12{,}592$, así que no se rechaza H_0. Al nivel del 3% la muestra no aporta evidencia suficiente para descartar la sospecha.

$$\boxed{\alpha = 5\%:\ \bar{X} > 12{,}481 \text{ cm, se rechaza } H_0; \qquad \alpha = 3\%:\ \bar{X} > 12{,}592 \text{ cm, no se rechaza } H_0.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Ecuación y operaciones con matrices

a) La ecuación es $X(BB^t) = \frac{1}{2}A - 2A^t$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primero calculamos las matrices del segundo miembro y el factor que multiplica a X:

$$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}A - 2A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(BB^t) = 10 - 1 = 9 \neq 0$, podemos despejar X multiplicando por $(BB^t)^{-1}$ a la derecha:

$$X = \left(\frac{1}{2}A - 2A^t\right)(BB^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -21 & 15 \\ -54 & 27 \end{pmatrix}.$$

b) A es 2×2 y B es 2×3; por tanto, B^t es 3×2. Además, A^{-1} existe porque $\det A = -12 + 8 = -4 \neq 0$, y tiene dimensión 2×2.

- AB está definido, pues coinciden las dimensiones interiores 2; el resultado es 2×3.
- AB^t no está definido: las dimensiones interiores son 2 y 3.
- BA^{-1} no está definido: las dimensiones interiores son 3 y 2.
- B^tA sí está definido y es 3×2, pero no puede sumarse con A^{-1}, que es 2×2. Por ello, $B^tA + A^{-1}$ no está definido.

$$\boxed{X = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -21 & 15 \\ -54 & 27 \end{pmatrix};\quad AB \in M_{2\times 3};\quad AB^t,\ BA^{-1},\ B^tA + A^{-1} \text{ no están definidos.}}$$

Ejercicio 2 · Mínimo y representación de una función de costes

La cantidad fabricada no puede ser negativa, así que el dominio físico es $x \geq 0$. La función de coste, en miles de euros, es $f(x) = 2x^2 - 36x + 200$. Para encontrar el mínimo, buscamos los puntos críticos y estudiamos cómo cambia la función:

$$f'(x) = 4x - 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 9.$$

La derivada es negativa para $0 \leq x < 9$ y positiva para $x > 9$; por tanto, el coste disminuye hasta $x = 9$ y aumenta a partir de ahí. El coste mínimo es

$$f(9) = 2\cdot 9^2 - 36\cdot 9 + 200 = 162 - 324 + 200 = 38$$

miles de euros. Se deben fabricar 9 miles de kilogramos, es decir, 9000 kg, y el coste mínimo es $38,000$ €.

b) La derivada en $x = 7$ indica la variación instantánea del coste respecto a la producción:

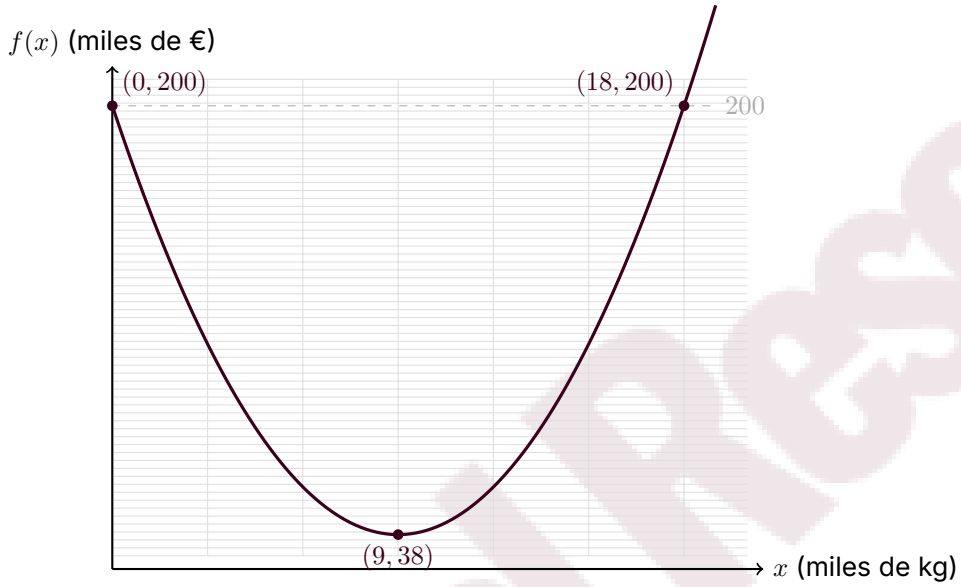
$$f'(7) = 4 \cdot 7 - 36 = -8 < 0.$$

En torno a una producción de 7000 kg, el coste está disminuyendo al aumentar la producción.

c) La gráfica es una parábola abierta hacia arriba, con vértice $(9, 38)$ y corte con el eje vertical $(0, 200)$. Para localizar dónde el coste es $200,000$ €, igualamos $f(x)$ a 200, pues la función está expresada en miles de euros:

$$2x^2 - 36x + 200 = 200 \quad \Longrightarrow \quad 2x(x - 18) = 0.$$

Las soluciones son $x = 0$ y $x = 18$, ambas dentro del dominio. Corresponden a producir 0 o $18,000$ kg. La gráfica muestra estos puntos relevantes:



Mínimo: $38,000$ € al producir 9000 kg; $\quad f'(7) = -8 < 0$; $\quad f(x) = 200$ si $x = 0$ o $x = 18$.

Ejercicio 3 · Probabilidad total y Bayes

Sean A, B y C los sucesos «el vuelo opera en la terminal A, B o C», respectivamente, y sea R el suceso «el vuelo sufre retraso». Las proporciones de vuelos de cada terminal son

$$P(A) = \frac{150000}{300000} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{100000}{300000} = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{50000}{300000} = \frac{1}{6}.$$

Las probabilidades condicionadas de retraso son $P(R \mid A) = 0{,}10$, $P(R \mid B) = 0{,}08$ y $P(R \mid C) = 0{,}05$. En el árbol, cada camino se multiplica para obtener su probabilidad conjunta, y se suman los caminos incompatibles que producen retraso:

Terminal	A	B	C
$P(\text{terminal y retraso})$	$\frac{1}{2} \cdot 0{,}10 = 0{,}05$	$\frac{1}{3} \cdot 0{,}08 = \frac{2}{75}$	$\frac{1}{6} \cdot 0{,}05 = \frac{1}{120}$

Así,

$$P(R) = 0{,}05 + \frac{2}{75} + \frac{1}{120} = 0{,}085.$$

a) La probabilidad de que el vuelo no sufriera retraso es la complementaria:

$$P(R^c) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}085 = 0{,}915.$$

b) Para invertir la condición y calcular la probabilidad de que el vuelo proceda de A sabiendo que se retrasó, aplicamos Bayes:

$$P(A \mid R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}05}{0{,}085} = \frac{10}{17} \approx 0{,}5882.$$

$P(\text{sin retraso}) = 0{,}915; \qquad P(A \mid R) = \dfrac{10}{17} \approx 0{,}5882.$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

La variable «peso del paquete» es normal y se conoce la desviación típica poblacional, $\sigma = 16$ g. Por ello, el intervalo bilateral para la media poblacional se construye con

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

donde $\bar{x} = 247$ g, $n = 100$ y $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil de la normal estándar correspondiente al nivel de confianza.

a) Para confianza del 97%, $\alpha = 0{,}03$ y $z_{0{,}985} \approx 2{,}170$. El error máximo de estimación es

$$E = 2{,}170\frac{16}{\sqrt{100}} = 3{,}472 \text{ g}.$$

Por tanto, el intervalo es

$$247 \pm 3{,}472 \quad \Longrightarrow \quad [243{,}528,\ 250{,}472] \text{ g}.$$

b) Para planificar una muestra con error máximo $E = 0{,}5$ g y confianza del 95%, usamos

$$E = z_{0{,}975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad z_{0{,}975} \approx 1{,}96.$$

Despejando el tamaño muestral,

$$n \geq \left(\frac{1{,}96 \cdot 16}{0{,}5}\right)^2 = 3933{,}7984.$$

Como el tamaño debe ser entero y superar el límite para garantizar el error indicado, redondeamos hacia arriba: se necesitan al menos 3934 paquetes.

$$\boxed{IC_{97\%}(\mu) \approx [243{,}528,\ 250{,}472] \text{ g}; \qquad n_{\text{mín}} = 3934.}$$

tuProfealRescate