

Modelo 2 de 2020

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

Desarrollando en torno a 0,

$$xe^x = x + x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

El numerador es $-(a+1)x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$. Para que el cociente entre x^2 sea finito, debe desaparecer el término lineal: $a = -1$. Entonces el límite es $\boxed{3/2}$.

Ejercicio 2

Integramos $f''(x) = 1/(x+1)$ en el dominio $x > -1$:

$$f'(x) = \ln(x+1) + C_1.$$

La condición $f'(0) = 0$ da $C_1 = 0$. Integrando de nuevo,

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x+1) + C_2.$$

Como $f(0) = 1$, se obtiene $C_2 = 2$. Por tanto, $\boxed{f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x + 1}$.

Ejercicio 3

La matriz de coeficientes tiene determinante $(a-1)^2(a+2)$. Para $a \neq 1, -2$ es SCD. Si $a = -2$, las filas de coeficientes suman cero, pero los términos independientes suman $1 - 2 + 4 = 3$; por Rouché-Frobenius, $\text{rg } A = 2 < \text{rg } A^* = 3$, así que es SI. Si $a = 1$, las tres ecuaciones se reducen a $x + y + z = 1$; entonces ambos rangos son $1 < 3$ y es SCI. Para $a = 1$, las soluciones satisfacen $x + y + z = 1$; para $a = -2$ no hay solución.

Ejercicio 4

Los planos de r tienen normales $(1, -1, 2)$ y $(1, 0, -1)$; por tanto, un director de la recta es $\vec{v} = (1, -1, 2) \times (1, 0, -1) = (1, 3, 1)$. Tomamos el punto $Q = (1, -4, 0)$, que satisface ambos planos. La proyección de P sobre r es

$$H = Q + \frac{(P-Q) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = Q + \vec{v} = (2, -1, 1),$$

pues $(P-Q) \cdot \vec{v} = 11 = |\vec{v}|^2$. El simétrico es $P' = 2H - P = \boxed{(3, -2, 3)}$.

Un punto $Q + t\vec{v}$ dista $\sqrt{6}$ de P cuando

$$|Q + t\vec{v} - P|^2 = 11t^2 - 22t + 17 = 6,$$

lo que equivale a $(t-1)^2 = 0$. El único punto es $\boxed{(2, -1, 1)}$.

Ejercicio 5

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Para $x < 0$, $f(x) = -x/(2-x)$ y $f'(x) = -2/(2-x)^2 < 0$. Para $x > 0$, $f(x) = x/(2-x)$ y $f'(x) = 2/(2-x)^2 > 0$ (con $x \neq 2$). En $x = 0$ la función es continua, pero las derivadas laterales son $-1/2$ y $1/2$; no es derivable allí. Crece en $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$, y decrece en $(-\infty, 0)$.

Ejercicio 6

El máximo de $g(x) = -x^2 + 2x + c$ se alcanza en $x = 1$. Para que el punto también esté en f , igualamos $g(1) = f(1)$: $1 + c = -2$, luego $c = -3$.

Con este valor, $g - f = -x^2 + 6x - 5 = -(x-1)(x-5)$, que es positivo entre 1 y 5. El área es

$$S = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \frac{32}{3}.$$

Ejercicio 7

La matriz A es una rotación de 120° (tiene columnas ortonormales y traza -1), por lo que $A^3 = I$. Así, $37 \equiv 1 \pmod{3}$ y $41 \equiv 2 \pmod{3}$:

$$A^{37} = A, \quad A^{41} = A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Además, $\det A = 1$, $\det A^t = 1$ y $\det(3M) = 3^2 \det M$ para matrices 2×2 . Por tanto,

$$\det(3A^{52}(A^t)^4) = 3^2 (\det A)^{52} (\det A^t)^4 = 9.$$

Ejercicio 8

La dependencia lineal equivale a que el determinante de los tres vectores sea cero. Como $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 2, -1)$, se exige $(-1, 2, -1) \cdot (a, b, 1) = 0$, es decir, $-a + 2b - 1 = 0$. La ortogonalidad con $\vec{u}$ da $2a + b = 0$. Resolviendo, $a = -1/5$, $b = 2/5$.

Si $a = 1$, el volumen del paralelepípedo es $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |(-1, 2, -1) \cdot (1, b, 1)| = |2b - 2|$. Al igualarlo a 6 se obtiene $b = 4$ o $b = -2$.