

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Se considera la región factible dada por el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned}x + y &\leq 5 \\x + 3y &\geq 9 \\x &\geq 0, y \geq 0\end{aligned}$$

Representar la región factible que determina el sistema de inecuaciones anterior y hallar de forma razonada el punto o puntos de la región factible donde las siguientes funciones alcanzan su máximo y su mínimo: a) $f(x,y) = 2x + 3y$, b) $f(x,y) = y - x$.

Solución:

Realicemos los cálculos para encontrar la región factible,

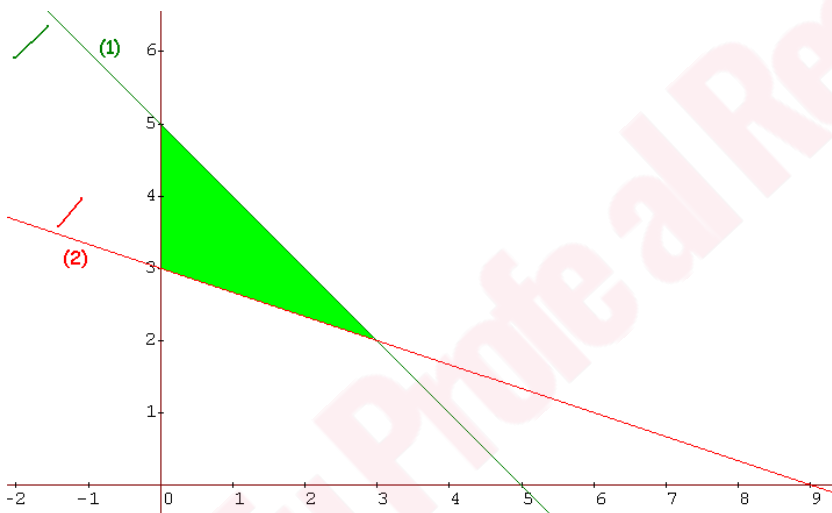
$$\begin{array}{l|l}x + y \leq 5 & x + 3y \geq 9 \\(1) \quad x + y = 5 & (2) \quad x + 3y = 9\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}x & y \\ \hline 0 & 5 \\ 5 & 0\end{array}$$

$\zeta(0,0)$ cumple? Sí
 $\zeta 0 + 0 \leq 5$? Sí

$$\begin{array}{c|c}x & y \\ \hline 0 & 3 \\ 9 & 0\end{array}$$

$\zeta(0,0)$ cumple? No
 $\zeta 0 + 3 \cdot 0 \geq 9$? No



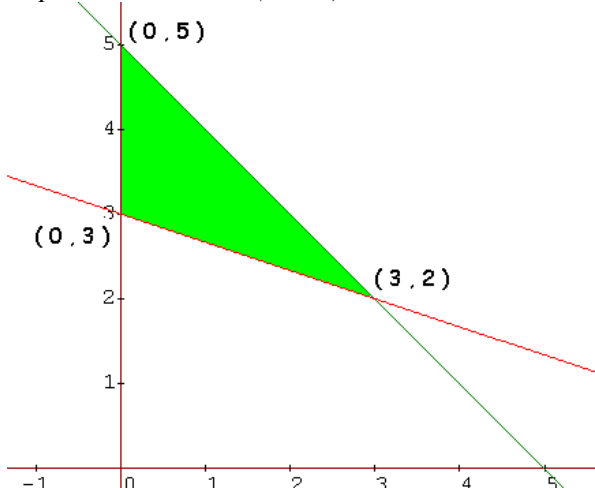
La región factible está formada por los puntos de la zona sombreada.

Obtengamos los extremos de esta región; nos falta el punto de corte entre las dos rectas.

Corte entre (1) y (2)

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$	Restando ambas ecuaciones: $2y = 4$ $y = 2$	Sustituyendo en la 1ª ecuación $x + 2 = 5$ $x = 3$
---	---	--

El punto de corte es $(3, 2)$



Para hallar los puntos de la región factible en que las funciones $f(x,y)$ alcanzan su máximo o mínimo calculamos el valor de $f(x,y)$ en los extremos de esta región.

a)

x, y	$f(x, y) = 2x + 3y$	
0, 5	$2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$	máximo
3, 2	$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$	
0, 3	$2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$	mínimo

La función $f(x, y) = 2x + 3y$ alcanza su máximo en el punto (0 , 5) y su mínimo en el (0 , 3).

b)

x, y	$f(x, y) = y - x$	
0, 5	$5 - 0 = 5$	máximo
3, 2	$2 - 3 = -1$	mínimo
0, 3	$3 - 0 = 3$	

La función $f(x, y) = y - x$ alcanza su máximo en el punto (0 , 5) y su mínimo en el (3 , 2).

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 2115 €. Calcular de forma razonada cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 9 €, cuántos han pagado el 20% del billete y cuántos el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20% es el doble del número de viajeros que ha pagado el billete entero.

Solución:

Utilizamos las siguientes incógnitas:

		precio del billete
viajeros que pagan el total	x	9 €
“ “ “ 20 %	y	1'80 €
“ “ “ 50 %	z	4'50 €

Las frases del enunciado nos proporcionaran la ecuación correspondiente,

Un tren transporta 500 viajeros, $x + y + z = 500$

La recaudación asciende a 2115 €, $9x + 1'80y + 4'50z = 2115$

El número de viajeros que han pagado el 20 %

es el doble de los que han pagado el 50 %; $y = 2x$; $2x - y = 0$

El sistema a resolver es,
$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 9x + 1'8y + 4'5z = 2115 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Calculamos el determinante del sistema para comprobar si podemos resolverlo por el método de Cramer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1'8 & 4'5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 9 - 3'6 + 4'5 = 0'9 \neq 0$$

Podemos resolverlo por el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 500 & 1 & 1 \\ 2115 & 1'8 & 4'5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{0'9} = \frac{-2115 + 2250}{0'9} = \frac{135}{0'9} = 150$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 500 & 1 \\ 9 & 2115 & 4'5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{0'9} = \frac{4500 - 4230}{0'9} = \frac{270}{0'9} = 300$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 500 \\ 9 & 1'8 & 2115 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{0'9} = \frac{-4500 + 4230 - 1800 + 2115}{0'9} = \frac{45}{0'9} = 50$$

Solución: 150 viajeros han pagado el importe total del billete, 300 el 20% del billete y 50 el 50% del mismo.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. La velocidad (en m./seg.) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros viene dada en función del espacio recorrido, x , por la siguiente expresión: $f(x) = -0'00055 x (x - 300)$

Deducir de forma razonada:

- ¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima? ¿Cuál es ésta velocidad?
- ¿Entre qué distancias su velocidad va aumentando? ¿Y disminuyendo?
- ¿A qué velocidad llega a la meta?

Solución:

$$f(x) = -0'00055 x (x - 300) = -0'00055 x^2 + 0'165 x$$

$f(x)$ mide la velocidad en función del espacio recorrido, como la carrera es de 200 m $\text{Dom } f = [0, 200]$

La representación gráfica de $f(x)$ es una parábola. Esta representación es fácil de obtener y nos será útil para responder a las preguntas.

Puntos de corte con los ejes coordenados

$$x = 0 \rightarrow f(x) = -0'00055 \cdot 0^2 + 0'165 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow 0'00055 x (x - 300) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow (0, 0) \\ x - 300 = 0 & \rightarrow x = 300 \rightarrow (300, 0) \end{cases}$$

Vértice

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0'165}{2(-0'00055)} = 150 \rightarrow y = -0'00055 \cdot 150 (150 - 300) = 12'375 \rightarrow (150, 12'375)$$

La representación gráfica de $f(x)$ será



a) ¿velocidad máxima?

$$f'(x) = -0'0011 x + 0'165$$

$$-0'0011 x + 0'165 = 0 \rightarrow x = \frac{-0'165}{-0'0011} = 150$$

$f'(x) = -0'0011$ luego $f'(150) = -0'0011$, es decir, en $x = 150$ hay un máximo relativo.

Como $f(x)$ es, gráficamente, una parábola “hacia abajo” y 150 está en el dominio de $f(x)$ este máximo relativo que hemos obtenido es el máximo absoluto de $f(x)$. Según los cálculos previos $f(150) = 12'375$.

El atleta alcanza su velocidad máxima, 12'375 m/s, cuando ha recorrido 150 m.

b) Podemos responder a esta pregunta de dos formas.

1) Considerando la representación gráfica realizada al principio, obtenemos que **la velocidad va aumentando entre 0 m. y 150 m y disminuye entre 150 m. y 200 m.**

2) Estudiando la monotonía de la función $f(x)$

Sabemos que $\text{Dom } f = [0, 200]$

Por lo calculado en el apartado a) $f'(x) = 0$ para $x = 150$

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos $(0, 150)$ y $(150, 200)$

intervalo	valor de x	$f'(x) = -0'0011x + 0'165$	
$(0, 150)$	100	$f'(x) = -0'0011 \cdot 100 + 0'165 = -0'11 + 0'165 = 0'055 > 0$	creciente
$(150, 200)$	180	$f'(x) = -0'0011 \cdot 180 + 0'165 = -0'11 + 0'165 = -0'033 < 0$	decreciente

Obtenemos que la velocidad va aumentando entre 0 m. y 150 m y disminuye entre 150 m. y 200 m.

c)

Como la meta está a 200 m. para saber la velocidad a la que llega basta con calcular $f(200)$

$$f(200) = -0'00055 \cdot 200 (200 - 300) = 11$$

El corredor llega a la meta a 11 m/s

Tu Prof te al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. En un aparato de radio hay presintonizadas tres emisoras A, B y C que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la B y la C lo hacen la mitad del tiempo de emisión. Al encender la radio se sintoniza indistintamente cualquiera de las tres emisoras.

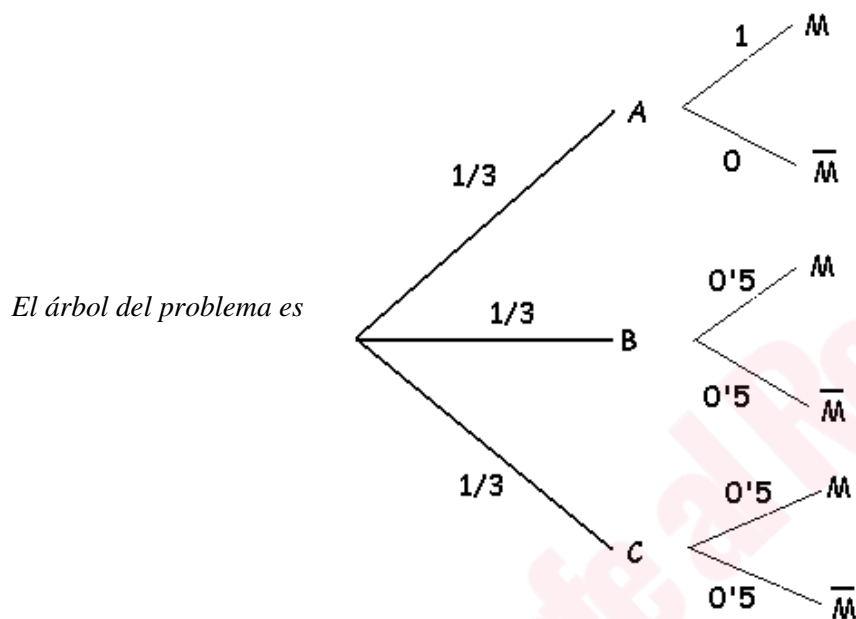
- Obtener de forma razonada la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música.
- Si al poner la radio no escuchamos música, calcular de forma razonada cuál es la probabilidad de que esté sintonizada la emisora B.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

A = sintonizar la emisora A B = sintonizar la emisora B C = sintonizar la emisora C

M = escuchar música



a)

$$P(M) = P\left(\frac{M}{A}\right)P(A) + P\left(\frac{M}{B}\right)P(B) + P\left(\frac{M}{C}\right)P(C) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6667$$

b)

$$P\left(\frac{B}{\overline{M}}\right) = \frac{P\left(\frac{\overline{M}}{B}\right)P(B)}{P\left(\frac{\overline{M}}{A}\right)P(A) + P\left(\frac{\overline{M}}{B}\right)P(B) + P\left(\frac{\overline{M}}{C}\right)P(C)} = \frac{0.5 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{0.5 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 0.5$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos de cola sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos. Los paquetes del tipo A contienen tres refrescos con cafeína y tres sin cafeína, y los del tipo B contienen dos con cafeína y cuatro sin cafeína. El vendedor gana 6 € por cada paquete que venda del tipo A y 5 € por cada uno que venda del tipo B. Calcular de forma razonada cuántos paquetes de cada tipo debe vender para maximizar los beneficios y calcular éste.

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

Paquetes	Refrescos que contiene		Ganancia/paquete	Nº de paquetes
	Cola con cafeína	Cola sin cafeína		
A	3	3	6€	x
B	2	4	5€	y
restricciones	120	180		

Beneficio: $6x + 5y$

Nº de refrescos de cola con cafeína: $3x + 2y$

Nº de refrescos de cola sin cafeína: $3x + 4y$

maximizar $z = 6x + 5y$

El problema que debemos resolver es:

$$s.a. \begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones,

$$3x + 2y \leq 120$$

$$3x + 4y \leq 180$$

(1) $3x + 2y = 120$

(2) $3x + 4y = 180$

x	y
0	60
40	0

¿(0,0)? Sí

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 120$$

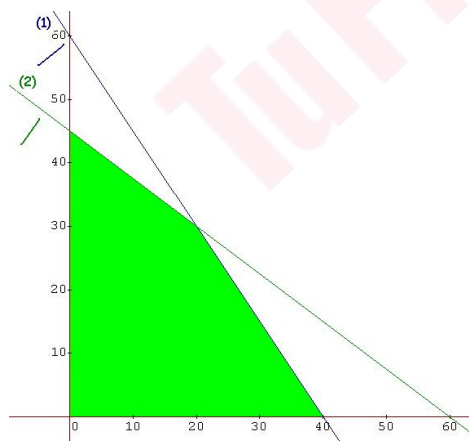
$$0 \leq 120 \quad \text{sí}$$

x	y
0	45
60	0

¿(0,0)? Sí

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \leq 180$$

$$0 \leq 180 \quad \text{sí}$$



La región factible son los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.

Calculemos los extremos de la región factible.

Corte entre (1) y (2),

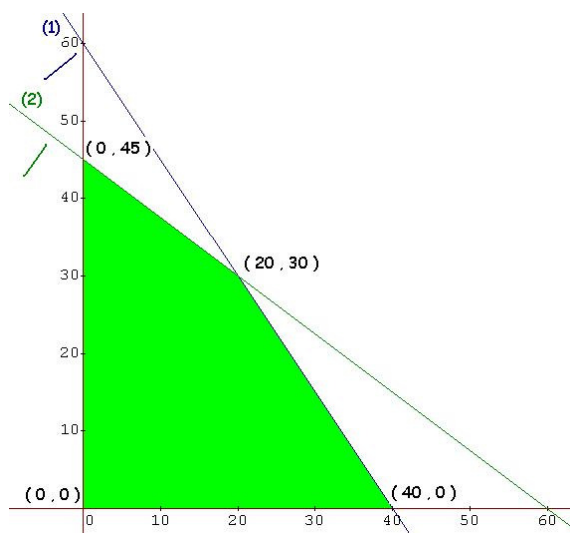
$$\begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ 3x + 4y = 180 \end{cases}$$

restando ambas ecuaciones, $2y = 60$; $y = 30$

sustituyendo en la 1ª, $3x + 2 \cdot 30 = 120$; $3x + 60 = 120$; $3x = 60$; $x = 20$

el punto de corte es $(20, 30)$

Los extremos de la región factible serán:



Como la función a maximizar alcanza su máximo en los extremos de la región factible, calculemos el valor de z en esos puntos.

x, y	$z = 6x + 5y$
0,0	$6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$
0,45	$6 \cdot 0 + 5 \cdot 45 = 225$
20,30	$6 \cdot 20 + 5 \cdot 30 = 270$ máximo
40,0	$6 \cdot 40 + 5 \cdot 0 = 240$

Para maximizar los beneficios debe vender 20 paquetes del tipo A y 30 del tipo B. Con estas ventas obtendrá un beneficio de 270 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Los tres vértices de un triángulo son $A=(0,1)$, $B=(1,2)$ y $C=(3,0)$.

- Encontrar de forma razonada la ecuación de la recta paralela al lado AB que pasa por el punto C.
- Hallar el punto de intersección de esta recta con la recta de ecuación $x + 3y = 2$.

Solución:

a) Recta paralela al lado AB que pasa por C.

El lado AB está sobre la recta que pasa por los puntos A y B. La ecuación de la recta será de la forma $y = mx + n$,

como pasa por A (0 , 1), $1 = m \cdot 0 + n$ luego $n = 1$

como pasa por B (1 , 2), $2 = m \cdot 1 + 1$; $2 = m + 1$ luego $m = 1$

El lado AB está sobre la recta $y = x + 1$

La recta que pase por C y sea paralela al lado AB tendrá la misma pendiente que la recta anterior, es decir, será de la forma $y = x + n$, como pasa por C (3 , 0) deberá cumplirse que $0 = 3 + n$, luego $n = -3$

La ecuación de la recta pedida es: $y = x - 3$

b) Debemos resolver el siguiente sistema,

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación,

$$x + 3(x - 3) = 2$$

$$x + 3x - 9 = 2$$

$$4x = 11$$

$$x = \frac{11}{4}$$

$$y = \frac{11}{4} - 3 = \frac{11-12}{4} = \frac{-1}{4}$$

El punto de intersección es $\left(\frac{11}{4}, \frac{-1}{4}\right)$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. La función $f(t) = 21t^2 + 08t - 1$, para $0 \leq t \leq 9$, donde el tiempo, t , viene expresado en años, proporciona los beneficios de una empresa en miles de euros entre los años 1991 ($t=0$) y 2000 ($t=9$).

- Calcular de forma razonada la tasa de variación media del beneficio de esta empresa en este periodo de tiempo.
- Obtener de forma razonada la tasa de variación media del beneficio en los dos últimos años.
- ¿Qué podemos concluir acerca de la variación del beneficio en los dos periodos anteriores?

Solución:

a)

$$TVM\{f(t), [0,9]\} = \frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{1763 - (-1)}{9} = \frac{1773}{9} = 197$$

$$f(9) = 21 \cdot 9^2 + 08 \cdot 9 - 1 = 1763$$

$$f(0) = 21 \cdot 0^2 + 08 \cdot 0 - 1 = -1$$

b)

$$TVM\{f(t), [8,9]\} = \frac{f(9) - f(8)}{9 - 8} = \frac{1763 - 1398}{1} = 1763 - 1398 = 365$$

$$f(8) = 21 \cdot 8^2 + 08 \cdot 8 - 1 = 1398$$

c)

Como la tasa de variación es una medida del crecimiento de una función podemos concluir que en todo el periodo de estudio (1991 – 2000), en término medio, los beneficios fueron creciendo y que en los dos últimos años (1999 – 2000) este crecimiento ha sido mucho mayor que en el periodo total.

En el periodo (1991 – 2000) el crecimiento medio fue de 19700 € al año y en el periodo (1999 – 2000) el crecimiento medio fue de 36500 € al año.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Un alumno realiza un examen tipo test que consta de 4 preguntas. Cada una de las preguntas tiene tres posibles respuestas, de las que sólo una es correcta. Si un alumno aprueba contestando correctamente dos o más preguntas, obtener de forma razonada la probabilidad de que apruebe si escoge las respuestas de cada una de las preguntas completamente al azar.

Solución:

Cada pregunta tiene tres posibles respuestas (sólo una es correcta), el alumno contesta al azar luego $p(\text{acertar una pregunta}) = 1/3$.

Como el test consiste en contestar a 4 preguntas del tipo anterior, llamando

$X =$ número de respuestas correctas

$$X = B\left(4, \frac{1}{3}\right)$$

Consideramos el suceso $A =$ el alumno aprueba

$$\begin{aligned} p(A) &= p(X \geq 2) = 1 - \{p(X=0) + p(X=1)\} = 1 - \left[\binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \binom{4}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right] = 1 - 1 \cdot 1 \frac{16}{81} - 4 \frac{1}{3} \frac{8}{27} = \\ &= 1 - \frac{16}{81} - \frac{32}{81} = \frac{81-16-32}{81} = \frac{33}{81} = 0.4074 \end{aligned}$$

Tu Profite al Rescate