

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Recuento y beneficio del restaurante

Sean x, y, z los desayunos, comidas y cenas servidos. El número de comidas fue igual al de desayunos y cenas juntos, y los datos de recaudación dan

$$y = x + z, \quad 4x + 8y + 10z = 1116, \quad 8y - 10z = 156.$$

Sustituyendo $x = y - z$ en la recaudación total se obtiene $12y + 6z = 1116$, es decir, $2y + z = 186$. Resolvemos junto con la diferencia entre las recaudaciones de comidas y cenas:

$$\begin{cases} 2y + z = 186, \\ 8y - 10z = 156 \end{cases} \implies y = 72, z = 42, x = y - z = 30.$$

El beneficio se calcula con la ganancia unitaria de cada tipo de servicio:

$$B = 2,50x + 4y + 5z = 2,50(30) + 4(72) + 5(42) = 573 \text{ €}.$$

30 desayunos, 72 comidas, 42 cenas; $B = 573 \text{ €}.$
--

Problema 2 · Extremos absolutos e integral

La función, continua en el intervalo cerrado $[0, 8]$, es

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & 0 \leq x < 2, \\ -\frac{x^2}{2} + 4x + 1, & 2 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

En $x = 2$ los dos trozos valen 7, por lo que la función es continua también en el punto de unión. Para localizar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado comparamos los extremos del intervalo y los puntos críticos interiores. En el primer tramo $f'(x) = 2 > 0$. En el segundo,

$$f'(x) = -x + 4 = 0 \implies x = 4.$$

La función crece hasta $x = 4$ y decrece a partir de ahí. Los valores candidatos son

$$f(0) = 3, \quad f(2) = 7, \quad f(4) = 9, \quad f(8) = 1.$$

Por tanto, el máximo absoluto es 9 en $x = 4$ y el mínimo absoluto es 1 en $x = 8$.

En $[5, 7]$ se utiliza el segundo tramo. Una primitiva es $F(x) = -x^3/6 + 2x^2 + x$, así que

$$\int_5^7 f(x) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + 2x^2 + x \right]_5^7 = \frac{287}{6} - \frac{205}{6} = \frac{41}{3}.$$

$\max_{[0,8]} f = 9 \text{ en } x = 4; \quad \min_{[0,8]} f = 1 \text{ en } x = 8; \quad \int_5^7 f(x) dx = \frac{41}{3}.$
--

Problema 3 · Estudios y puestos directivos

Sean L, S, P los sucesos de que un empleado tenga estudios universitarios, secundarios o primarios, respectivamente, y D el suceso «ocupa un puesto directivo». Los tres niveles son incompatibles y cubren todos los casos. Calculamos las probabilidades conjuntas:

	L	S	P	Total
$P(\text{nivel})$	0,55	0,25	0,20	1
$P(D \cap \text{nivel})$	0,11	0,0075	0,002	0,1195

a) La probabilidad de ser directivo es $P(D) = 0,1195$. Aplicamos Bayes para invertir la condición:

$$P(L | D) = \frac{P(L \cap D)}{P(D)} = \frac{0,55 \cdot 0,20}{0,1195} = \frac{220}{239}.$$

b) Para tener estudios primarios y no ser directivo, multiplicamos la proporción de empleados con estudios primarios por la probabilidad condicionada de no ser directivo en ese grupo:

$$P(P \cap \overline{D}) = 0,20(1 - 0,01) = 0,198.$$

c) Aplicamos la fórmula de la unión y restamos la intersección para no contar dos veces a quienes son secundarios y directivos:

$$P(S \cup D) = P(S) + P(D) - P(S \cap D) = 0,25 + 0,1195 - 0,0075 = 0,362.$$

$$P(L | D) = \frac{220}{239}; \quad P(P \cap \overline{D}) = 0,198; \quad P(S \cup D) = 0,362.$$

Opción B

Problema 1 · Operaciones con matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Primero restamos la identidad y después multiplicamos la matriz obtenida por sí misma:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

b) La traspuesta de B es $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Multiplicando filas de A por columnas de B^t :

$$AB^t = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}.$$

c) Como $\det B = 2 \neq 0$, existe la inversa

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Restamos elemento a elemento:

$$A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} \\ -1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}; \quad AB^t = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}; \quad A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} \\ -1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Estudio de una función racional

La función es $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Su denominador no puede ser cero, por lo que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

El numerador se anula en $x = 0$, que pertenece al dominio; el corte con ambos ejes es $(0, 0)$.

Asíntotas. El numerador no se anula en $x = \pm 1$. Estudiando el signo del denominador a cada lado:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Los grados de numerador y denominador coinciden y sus coeficientes principales valen 1, luego

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1,$$

por lo que $y = 1$ es asíntota horizontal.

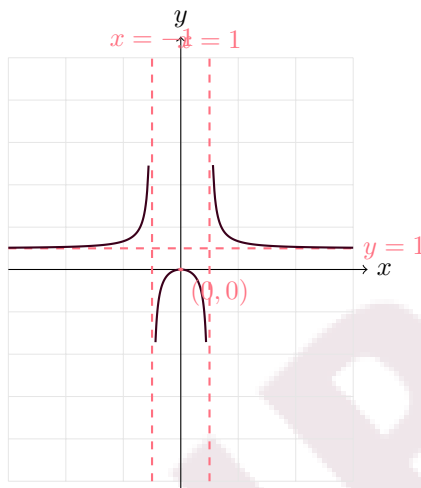
Crecimiento y extremos. La derivada es

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio; el signo depende del opuesto de x . Dividiendo la recta en los puntos excluidos y en el punto crítico $x = 0$:

intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
prueba x	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$

Así, crece en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$, y decrece en $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. La derivada cambia de positiva a negativa en $x = 0$, por lo que hay un máximo local en $(0, 0)$ y no hay mínimos locales.



Corte $(0, 0)$; $x = \pm 1$ verticales; $y = 1$ horizontal; máximo local $(0, 0)$, sin mínimos locales.

Problema 3 · Vaqueros y calzado deportivo

Sean V el suceso «viste vaqueros» y D el suceso «lleva calzado deportivo». Se conocen $P(V) = 0,35$, $P(D) = 0,50$ y $P(\overline{V} \cap \overline{D}) = 0,30$. Por tanto,

$$P(V \cup D) = 1 - 0,30 = 0,70.$$

a) La probabilidad de vestir vaqueros o llevar calzado deportivo es precisamente la unión:

$$P(V \cup D) = 0,70.$$

b) Despejamos la intersección en la fórmula de la unión:

$$P(V \cap D) = P(V) + P(D) - P(V \cup D) = 0,35 + 0,50 - 0,70 = 0,15.$$

c) Si lleva vaqueros, pero no calzado deportivo, está en V y fuera de D :

$$P(V \cap \overline{D}) = P(V) - P(V \cap D) = 0,35 - 0,15 = 0,20.$$

d) La probabilidad condicionada se calcula dentro del grupo que no lleva calzado deportivo. Su probabilidad es $P(\overline{D}) = 0,50$ y $P(\overline{V} \cap \overline{D}) = 0,30$:

$$P(\overline{V} | \overline{D}) = \frac{P(\overline{V} \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,30}{0,50} = 0,60.$$

$P(V \cup D) = 0,70$; $P(V \cap D) = 0,15$; $P(V \cap \overline{D}) = 0,20$; $P(\overline{V} | \overline{D}) = 0,60$.