

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2010

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Rango y sistema homogéneo

La matriz A tiene tres filas y cuatro columnas:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}.$$

a) **Rango según m .** El rango no puede superar 3. Al calcular los menores de orden tres formados por las columnas 2, 3 y 4 se obtiene

$$\det \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix} = (m-2)^2(m+1).$$

Por tanto, el rango es 3 si $m \neq 2, -1$. Para los valores singulares, todos los menores de orden tres se anulan. Si $m = -1$, el menor de orden dos de las dos primeras filas y columnas primera y segunda vale 3, así que el rango es 2. Si $m = 2$, las tres filas de A coinciden y son no nulas, luego el rango es 1. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $m \neq -1, 2$; es 2 si $m = -1$ y 1 si $m = 2$.

b) **Sistema homogéneo para $m = 0$.** Sustituyendo el parámetro,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La reducción por filas da las ecuaciones $x + z = 0$, $y + z = 0$ y $t = 0$. Tomando $z = s$ como parámetro libre:

$$(x, y, z, t) = (-s, -s, s, 0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Esa es la familia de soluciones de $A_0 X = 0$.

Opción A - Ejercicio 2. Recta perpendicular común

La primera recta es paralela al eje x y pasa por $P = (0, 1, 3)$, mientras que r_2 es la recta $x = 0, y = z$, que pasa por el origen y tiene dirección $(0, 1, 1)$. Si $R = (t, 1, 3) \in r_1$ y $S = (0, u, u) \in r_2$, la perpendicularidad de $\overrightarrow{RS}$ a las dos direcciones exige

$$\overrightarrow{RS} \cdot (1, 0, 0) = -t = 0, \quad \overrightarrow{RS} \cdot (0, 1, 1) = (u-1) + (u-3) = 0.$$

De aquí $t = 0$ y $u = 2$. Los puntos correspondientes son $R = (0, 1, 3)$ y $S = (0, 2, 2)$; el vector $S - R = (0, 1, -1)$ es perpendicular a ambas rectas. **Conclusión.** La perpendicular común es $(x, y, z) = (0, 1, 3) + \lambda(0, 1, -1)$. La distancia mínima es $\|S - R\| = \sqrt{2}$.

Opción A - Ejercicio 3. Límites notables

a) Para calcular una potencia con base que tiende a 1, tomamos logaritmos y usamos los límites notables $\frac{\arctan x}{x} \rightarrow 1$ y $\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} \ln(1 + \arctan x) \right) = e^a.$$

Conclusión. El límite es e^a .

b) Dividimos numerador y denominador por e^x , que es el término de crecimiento más rápido:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^{-x} + 2}{7xe^{-x} + 5} = \frac{2}{5}.$$

Conclusión. El límite es $\frac{2}{5}$.

Opción A - Ejercicio 4. Integrales

a) En $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ hacemos $u = 4 - x^2$, de modo que $du = -2x dx$. Los extremos pasan de $x = 0, 1$ a $u = 4, 3$:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_4^3 u^{-1/2} du = [-\sqrt{4-x^2}]_0^1 = 2 - \sqrt{3}.$$

Conclusión. La primera integral vale $2 - \sqrt{3}$.

b) Integramos por partes con $u = x$ y $dv = \cos x dx$:

$$\int_0^\pi x \cos x dx = [x \sin x + \cos x]_0^\pi = -2.$$

Conclusión. La segunda integral vale -2 .

Opción B - Ejercicio 1. Planos paralelos e igual distancia

El plano π_2 tiene como vectores directores $\vec{v}_1 = (0, 2, 6)$ y $\vec{v}_2 = (1, 0, b)$. Su normal es

$$\vec{n}_2 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (2b, 6, -2).$$

Para que sea paralelo a π_1 , su normal debe ser proporcional a $(2, -3, 1)$. Comparando componentes se obtiene $b = -2$; el parámetro a del plano π_1 puede ser cualquiera. Cuando $a = -2$, los planos coinciden; para los demás valores son paralelos distintos. **Conclusión.** La condición de paralelismo es $b = -2$, con $a \in \mathbb{R}$; son distintos si $a \neq -2$.

b) **Intersección si $a = 1$ y $b = 0$.** El normal de π_2 es proporcional a $(0, 3, -1)$, y como pasa por $P = (0, 2, 4)$ su ecuación es $3y - z - 2 = 0$. Junto con $2x - 3y + z = 1$, esto da $x = \frac{3}{2}$ y $z = 3y - 2$. Por tanto, **Conclusión.** La recta de intersección es $(x, y, z) = (\frac{3}{2}, 0, -2) + t(0, 1, 3)$.

c) **Puntos equidistantes si $a = 4$ y $b = -2$.** En este caso los planos son paralelos y tienen la misma normal. Sus ecuaciones son $2x - 3y + z = 4$ y $2x - 3y + z = -2$. El plano equidistante de ambos está a mitad de camino: el valor común del lado izquierdo es el promedio $(4 + (-2))/2 = 1$. **Conclusión.** El conjunto de puntos equidistantes es el plano $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Opción B - Ejercicio 2. Optimización del volumen

Los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (2, 1, 1)$ y $A = (a, 0, 0)$ determinan un plano. Para obtenerlo calculamos dos vectores del plano y su normal:

$$\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 0), \quad \overrightarrow{PA} = (a-1, -2, -1), \quad \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PA} = (1, 1, a-3).$$

Usando P en la ecuación punto-normal, resulta

$$\pi: x + y + (a-3)z - a = 0.$$

Sus cortes con los semiejes positivos son $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$ y $C = (0, 0, \frac{a}{a-3})$. Por tanto, el volumen del tetraedro con el origen es

$$V(a) = \frac{1}{6} a \cdot a \cdot \frac{a}{a-3} = \frac{a^3}{6(a-3)}, \quad a > 3.$$

Derivamos para localizar el mínimo:

$$V'(a) = \frac{a^2(2a-9)}{6(a-3)^2}.$$

En el dominio $a > 3$, la derivada es negativa si $3 < a < \frac{9}{2}$ y positiva si $a > \frac{9}{2}$. Así, el volumen alcanza un mínimo cuando $a = \frac{9}{2}$. Su valor es

$$V\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{81}{8}.$$

Conclusión. El volumen mínimo se obtiene para $a = \frac{9}{2}$ y vale $\frac{81}{8}$ unidades cúbicas.

Opción B - Ejercicio 3. Compatibilidad y ecuaciones añadidas

La matriz de coeficientes tiene dos filas independientes, por lo que su rango es 2. Como hay tres incógnitas y el sistema tiene dos ecuaciones, Rouché-Frobenius lo clasifica como compatible indeterminado. Resolviendo con $z = t$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{6-t}{5}, \frac{3t-3}{5}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para hacerlo compatible determinado podemos añadir, por ejemplo, $z = 0$, cuya fila de coeficientes no es combinación de las dos anteriores. Se obtiene una única solución, $(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$. Para hacerlo incompatible podemos añadir $x + 2y - z = 1$, ya que el sistema original exige que esa misma expresión valga 0; las dos ecuaciones tendrían el mismo lado izquierdo y términos independientes distintos. **Conclusión.** El sistema original es SCl; al añadir $z = 0$ resulta SCD, y al añadir $x + 2y - z = 1$ resulta SI.

Opción B - Ejercicio 4. Rango e inversa

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $\det A = -a(a-2)$. Si $a \neq 0, 2$, es no nulo y el rango es 3. En los valores singulares, $a = 0$ da rango 2 (el menor de las filas segunda y tercera y columnas segunda y tercera vale -2), y $a = 2$ también da rango 2 (el menor de las dos primeras filas y columnas primera y segunda vale -2). **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $a \neq 0, 2$ y $\text{rg}(A) = 2$ si $a = 0$ o $a = 2$. La inversa existe exactamente cuando $a \neq 0, 2$.

Para $a = 1$, $\det A = 1$. Calculando la matriz adjunta y dividiendo por el determinante se obtiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. Para $a = 1$, la inversa es la matriz indicada.