

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq \frac{y}{2} \\ 760x + 370y \leq 94500 \\ y + \frac{x}{2} \geq 100 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el máximo de la función $f(x,y) = x + y$ en esta región. ¿En qué punto se alcanza?

Solución:

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x \geq \frac{y}{2}$

$$x = \frac{y}{2}$$

x	y
0	0
100	200

¿(100,0) cumple?

$$100 \geq \frac{0}{2} \text{ Sí}$$

(b) $760x + 370y \leq 94500$

$$760x + 370y = 94500$$

x	y
0	$\frac{94500}{370} \approx 255'41$
$\frac{94500}{760} \approx 124'34$	0

¿(0,0) cumple?

$$760 \cdot 0 + 370 \cdot 0 \leq 94500$$

$$0 \leq 94500 \text{ Sí}$$

(c) $y + \frac{x}{2} \geq 100$

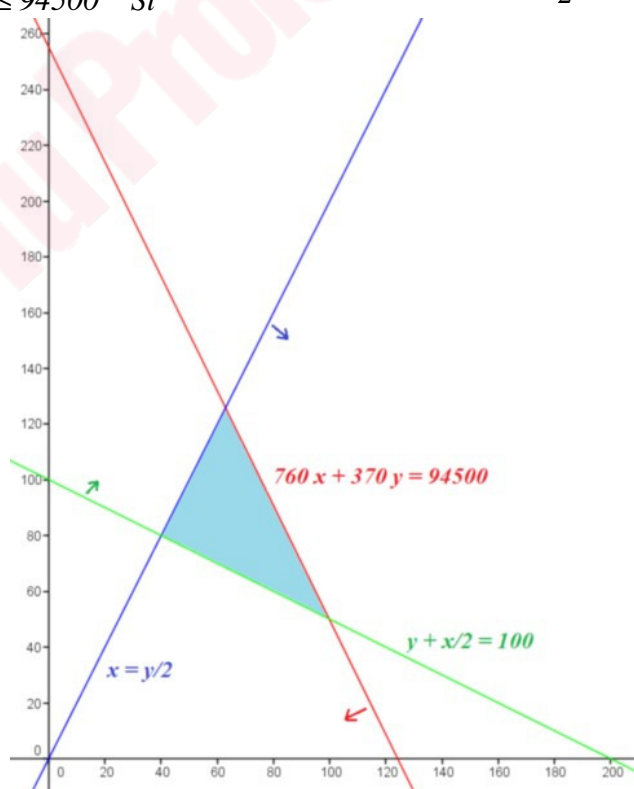
$$y + \frac{x}{2} = 100$$

x	y
0	100
200	0

¿(0,0) cumple?

$$0 + \frac{0}{2} \geq 1000 \text{ No}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

De (a) y (c): $A (40 , 80)$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ y + \frac{x}{2} = 100 \end{cases}$$

sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación:

$$y + \frac{\frac{y}{2}}{2} = 100 \rightarrow y + \frac{y}{4} = 100 \rightarrow \frac{4y + y}{4} = 100 \rightarrow 5y = 400 \rightarrow y = \frac{400}{5} = 80$$

$$\text{Finalmente, } x = \frac{80}{2} = 40$$

De (a) y (c): $B (63 , 126)$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ 760x + 370y = 94500 \end{cases}$$

sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación:

$$760 \frac{y}{2} + 370y = 94500 \rightarrow 380y + 370y = 94500 \rightarrow 750y = 94500 \rightarrow y = \frac{94500}{750} = 126$$

$$\text{Finalmente, } x = \frac{126}{2} = 63$$

De (b) y (c): $C (100 , 50)$

$$\begin{cases} 760x + 370y = 94500 \\ y + \frac{x}{2} = 100 \end{cases}$$

$$\text{De la 2ª ecuación, } 2y + x = 200 \rightarrow x = 200 - 2y$$

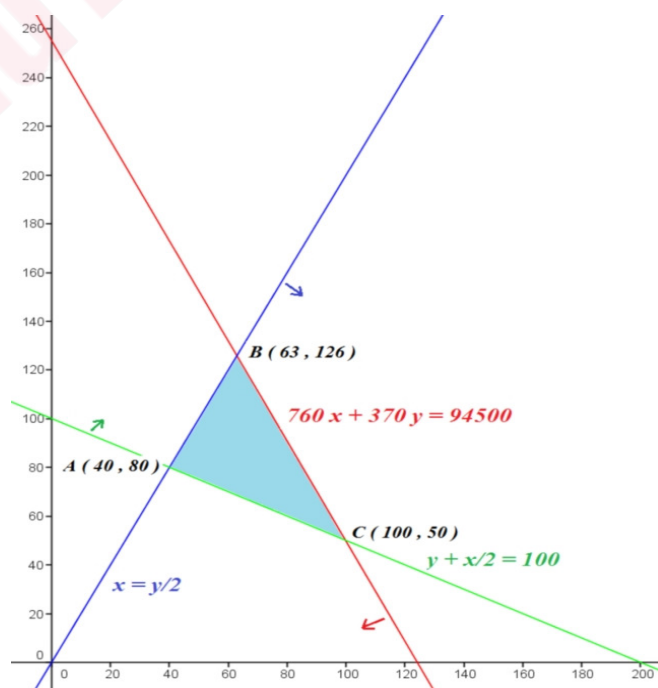
$$\text{Sustituyendo el valor de } x \text{ en la 1ª ecuación: } 760(200 - 2y) + 370y = 94500;$$

$$152000 - 1520y + 370y = 94500; \quad 152000 - 1150y = 94500; \quad -1150y = 94500 - 152000$$

$$-1150y = -57500; \quad y = \frac{-57500}{-1150} = 50$$

$$\text{Finalmente, } x = 200 - 2 \cdot 50 = 100$$

Los vértices de la región determinada por el sistema de inecuaciones son: $A (40 , 80)$, $B (63 , 126)$ y $C (100 , 50)$.



El máximo de la función $f(x,y)$ en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$f(x,y) = x + y$	
40, 80	$40 + 80 = 120$	
63, 126	$63 + 126 = 189$	Máximo
100, 500	$100 + 50 = 150$	

El máximo de la función $f(x,y) = x + y$ en esta región es 189 y se alcanza en el punto (63 , 126).

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. En una sesión, el valor de cierta acción, en euros, vino dado por la función:

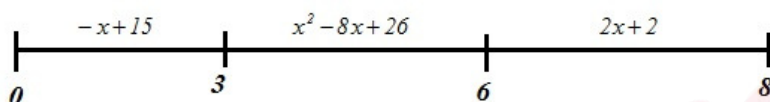
$$f(x) = \begin{cases} -x + 15 & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 26 & 3 < x \leq 6 \\ 2x + 2 & 6 < x \leq 8 \end{cases}$$

Donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde el inicio de la sesión. Se pide:

- Estudiar la continuidad de $f(x)$.
- Calcular el valor máximo y el valor mínimo que alcanzó la acción.
- ¿En qué momentos convino comprar y vender para maximizar el beneficio? ¿Cuál hubiera sido este?

Solución:

a) $f(x)$ está definida en el intervalo $[0, 8]$ mediante tres trozos que son:



En cada uno de los trozos la definición de $f(x)$ es un polinomio, por lo tanto en cada trozo la función es continua. Tenemos que estudiar la continuidad en los cambios de definición.

$$x = 3$$

$$1) f(3) = -3 + 15 = 12$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x + 15) = -3 + 15 = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 8x + 26) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 26 = 11 \end{cases} \quad 12 \neq 11, \text{ no existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Luego $f(x)$ no es continua en $x = 3$, en $x = 3$ $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito.

$$x = 6$$

$$1) f(6) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 26 = 36 - 48 + 26 = 14$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (x^2 - 8x + 26) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 26 = 14 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} (2x + 2) = 2 \cdot 6 + 2 = 14 \end{cases} = 14$$

$$3) f(6) = \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 14$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 6$

Finalmente, $f(x)$ es continua en $[0, 8] - \{3\}$ y en $x = 3$ tiene una discontinuidad de salto finito.

Para responder a los siguientes apartados, vamos a representar gráficamente la función.

Primer trozo, $y = -x + 15$, gráficamente es una línea recta.

Tabla de valores para obtener principio y final,

x	$y = -x + 15$
0	15
3	12

Segundo trozo, $y = x^2 - 8x + 26$, gráficamente es una parábola. Tabla de valores para obtener principio y final y además el vértice de la parábola,

x	$y = x^2 - 8x + 26$
3	11
6	18

Vértice $(4, 10)$

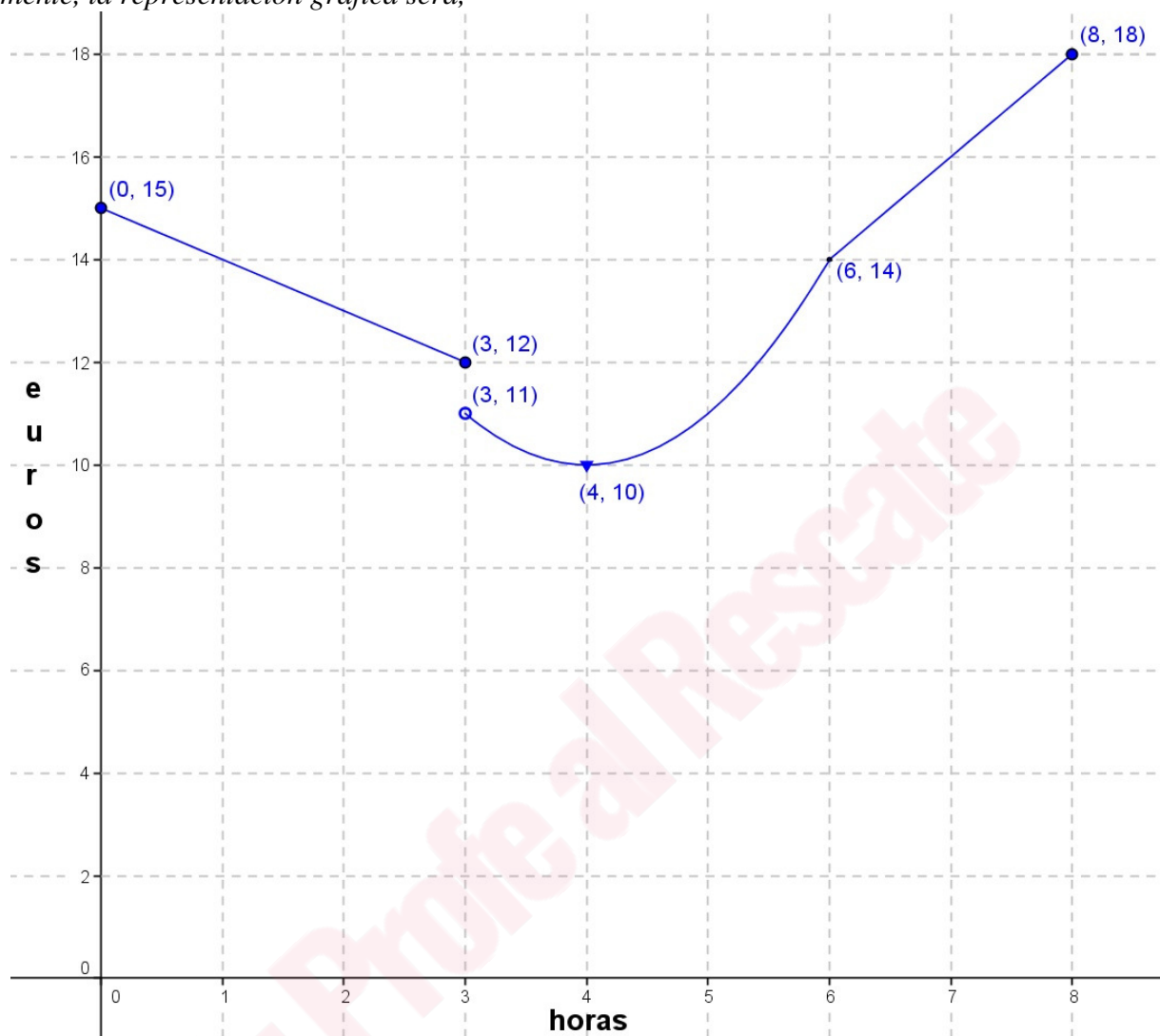
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y = 4^2 - 8 \cdot 4 + 26 = 10$$

Tercer trozo, $y = 2x + 2$, gráficamente es una línea recta. Tabla de valores para obtener principio y final,

x	$y = 2x + 2$
6	14
8	18

Finalmente, la representación gráfica será,



Considerando los cálculos realizados anteriormente y la representación gráfica de la función $f(x)$:

b) La acción alcanzó un **valor máximo de 18 euros** y un **valor mínimo de 10 euros**.

c) Para maximizar el beneficio habría que **haber comprado a las 4 horas del inicio de la sesión** (que la acción estaba a 10 euros, mínimo) y **vender a las 8 horas del inicio de la sesión** (que la acción estaba a 18 euros, máximo). En este caso **el beneficio habría sido de 8 euros** ($18 - 10 = 8$).

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Una factoría dispone de tres máquinas para fabricar una misma pieza. La más antigua fabrica 1000 unidades al día, de las que el 2% son defectuosas. La segunda máquina más antigua, 3000 unidades al día, de las que el 1,5% son defectuosas. La más moderna fabrica 4000 unidades al día, con el 0,5% de defectuosas. Se pide:

- ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa?
- Si una pieza elegida al azar es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina más antigua?
- Sabiendo que una pieza elegida al azar no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la máquina más moderna?

Solución:

Considerando los sucesos:

M_1 = la pieza ha sido fabricada por la máquina más antigua

M_2 = la pieza ha sido fabricada por la segunda máquina más antigua

M_3 = la pieza ha sido fabricada por la máquina más moderna

D = la pieza es defectuosa

Las tres máquinas fabrican un total de $1000 + 3000 + 4000 = 8000$ piezas, por lo que:

$$P(M_1) = \frac{1000}{8000} = \frac{1}{8}, \quad P(M_2) = \frac{3000}{8000} = \frac{3}{8}, \quad P(M_3) = \frac{4000}{8000} = \frac{4}{8}$$

La máquina M_1 fabrica un 2% de piezas defectuosas, luego en M_1

$$P(D) = \frac{2}{100} = 0'02 \quad \text{y} \quad P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0'02 = 0'98$$

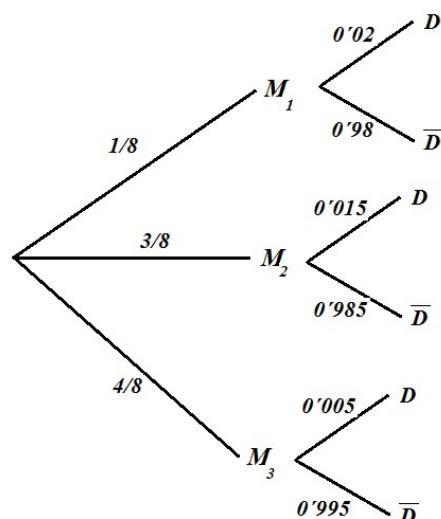
La máquina M_2 fabrica un 1'5% de piezas defectuosas, luego en M_2

$$P(D) = \frac{1'5}{100} = 0'015 \quad \text{y} \quad P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0'015 = 0'985$$

La máquina M_3 fabrica un 0'5% de piezas defectuosas, luego en M_3

$$P(D) = \frac{0'5}{100} = 0'005 \quad \text{y} \quad P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0'005 = 0'995$$

El problema podemos resumirlo en el siguiente árbol,



a) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$$P(D) = P(M_1)P\left(\frac{D}{M_1}\right) + P(M_2)P\left(\frac{D}{M_2}\right) + P(M_3)P\left(\frac{D}{M_3}\right) = \frac{1}{8}0'02 + \frac{3}{8}0'015 + \frac{4}{8}0'005 = 0'010625 \approx \mathbf{0'0106}$$

b) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$$P\left(\frac{M_1}{D}\right) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{8}0'02}{0'010625} = 0'235294... \approx \mathbf{0'2353}$$

c) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad: $P\left(\frac{\overline{M_3}}{\overline{D}}\right)$

Como las piezas son fabricadas por una de las tres máquinas entonces,

$$P\left(\frac{\overline{M_3}}{\overline{D}}\right) = P\left(\frac{M_1}{\overline{D}}\right) + P\left(\frac{M_2}{\overline{D}}\right) = \frac{P(M_1 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} + \frac{P(M_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = (*)$$

Del apartado a) conocemos $P(D)$, luego $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0'010625 = 0'989375$

$$(*) = \frac{\frac{1}{8}0'98}{0'989375} + \frac{\frac{3}{8}0'985}{0'989375} = 0'497157... \approx \mathbf{0'4972}$$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Después de aplicar un descuento del 10% a cada uno de los precios originales, se ha pagado por un rotulador, un cuaderno y una carpeta 3,96 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula el precio original de cada objeto.

Solución:

Utilizamos las siguientes incógnitas:

x = precio original de un rotulador

y = precio original de un cuaderno

z = precio original de una carpeta

De los datos del problema:

“tras aplicar un descuento del 10% a los precios originales, se ha pagado por un rotulador, un cuaderno y una carpeta 3,96 €” $\rightarrow 0,90(x + y + z) = 3,96 \rightarrow x + y + z = \frac{3,96}{0,90} \rightarrow x + y + z = 4,4$

“el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador” $\rightarrow y = \frac{x}{2} \rightarrow 2y = x \rightarrow -x + 2y = 0$

“el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador” $\rightarrow z = y + 0,20x$; multiplicando por 5: $5z = 5y + x \rightarrow x + 5y - 5z = 0$

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x + y + z = 4,4 \\ -x + 2y = 0 \\ x + 5y - 5z = 0 \end{cases}$$

Resolviéndolo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4,4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4,4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 22 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4,4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 22 \end{array} \right) \text{ y ya podemos}$$

resolver el sistema:

$$\text{De la 3ª fila} \rightarrow 11x = 22 \rightarrow x = \frac{22}{11} = 2$$

De la 2ª fila $\rightarrow -x + 2y = 0$, *sustituyendo el valor de obtenido anteriormente:*

$$-2 + 2y = 0$$

$$2y = 2$$

$$y = \frac{2}{2} = 1$$

De la 1ª fila $\rightarrow x + y + z = 4,4$, *sustituyendo los valores obtenidos anteriormente:*

$$2 + 1 + z = 4,4$$

$$3 + z = 4,4$$

$$z = 4,4 - 3$$

$$z = 1,4$$

Solución: El precio original de un rotulador era 2 €, el de un cuaderno 1 € y el de una carpeta 1,40 €.

Resolviéndolo por el método de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 5 - 2 - 5 = -22 \neq 0 \text{ por lo tanto resoluble por Cramer.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4'4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{4'4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{4'4 \cdot (-10)}{-22} = \frac{-44}{-22} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4'4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-4'4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-4'4 \cdot 5}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4'4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{4'4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{4'4 \cdot (-5 - 2)}{-22} = \frac{4'4 \cdot (-7)}{-22} = \frac{-30'8}{-22} = 1'4$$

Solución: El precio original de un rotulador era 2 €, el de un cuaderno 1 € y el de una carpeta 1'40 €.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x) = (x-1)^2 (x+2)^2$, se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.
- El valor de la integral definida de $f(x)$ entre $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f(x)$ es una función polinómica, por lo tanto $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$.

Corte con el eje OY

$$x = 0 \rightarrow f(0) = (0-1)^2 (0+2)^2 = 1 \cdot 4 = 4 \rightarrow (0, 4)$$

Corte con el eje OX

$$f(x) = 0 \rightarrow (x-1)^2 (x+2)^2 = 0 \quad \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow (1, 0) \\ (x+2)^2 = 0 \rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow (-2, 0) \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0, 4)$, $(1, 0)$ y $(-2, 0)$.

Para resolver los apartados b) y c) hay que estudiar el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = 2(x-1)(x+2)^2 + 2(x-1)^2(x+2) = 2(x-1)(x+2)[x+2+x-1] = 2(x-1)(x+2)[2x+1]$$

$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2(x-1)(x+2)[2x+1] = 0 \rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$$2x+1=0 \rightarrow 2x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

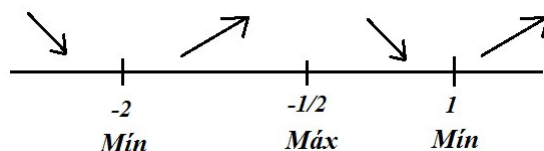
Hay que estudiar el signo de $f'(x)$ en cada uno de los siguientes intervalos:

x	$f'(x) = 2(x-1)(x+2)(2x+1)$
-3	$2(-3-1)(-3+2)[2(-3)+1] = 2(-4)(-1)[-5] = -$
-1	$2(-1-1)(-1+2)[2(-1)+1] = 2(-2)(1)[-1] = +$
0	$2(-1)(2)(1) = -$
2	$2(2-1)(2+2)(2 \cdot 2+1) = 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = +$

Es decir: $\begin{array}{c} - \quad + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \quad | \\ -2 \quad -1/2 \quad 1 \end{array}$

b) Luego, $f(x)$ es creciente en $\left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

c) De lo estudiado anteriormente



Para $x = -2 \rightarrow f(-2) = 0$ (calculado en a))

$$\text{Para } x = \frac{-1}{2} \rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2} - 1\right)^2 \left(\frac{-1}{2} + 2\right)^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \frac{9}{4} = \frac{81}{16}$$

Para $x = 1 \rightarrow f(1) = 0$ (calculado en a))

Por tanto, $f(x)$ tiene un **máximo local** en $\left(\frac{-1}{2}, \frac{81}{16}\right)$ y **mínimos locales** en $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.

d) Hay que calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 [(x-1)^2 (x+2)^2] dx$

Para resolver esta integral nos interesa tener la expresión polinómica de $f(x)$,

$$f(x) = (x-1)^2 (x+2)^2 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x + 4) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x^3 - 8x^2 - 8x + x^2 + 4x + 4 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 [(x-1)^2 (x+2)^2] dx = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) dx = \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^1 = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - 2x^2 + 4x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 1 - 2 + 4 \right) - \left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{2} + 1 - 2 - 4 \right) = \left(\frac{2+5}{10} + 1 \right) - \left(\frac{-2+5}{10} - 5 \right) = \\ &= \frac{7}{10} + 1 - \frac{3}{10} + 5 = \frac{4}{10} + 6 = 6.4 \end{aligned}$$

Solución: $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6.4$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. En una empresa el 30% de los trabajadores son técnicos informáticos y el 20% son técnicos electrónicos, mientras que un 10% tienen las dos especialidades.

- Calcula la probabilidad de que un trabajador de dicha empresa seleccionado al azar sea técnico informático o electrónico.
- Si seleccionamos al azar a un técnico electrónico, ¿cuál es la probabilidad de que sea también técnico informático?
- Si seleccionamos un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un técnico que tiene solo una de las dos especialidades?

Solución:

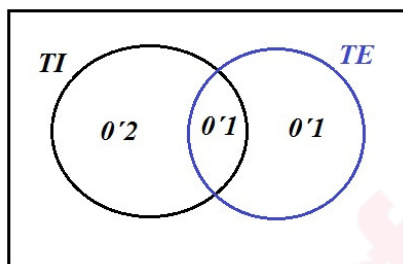
Consideramos los siguientes sucesos:

TI = trabajador es técnico informático

TE = trabajador es técnico electrónico

De los datos del problema sabemos que $P(TI) = 0.3$, $P(TE) = 0.2$ y $P(TI \cap TE) = 0.1$

El problema podemos representarlo mediante el siguiente diagrama de Venn:



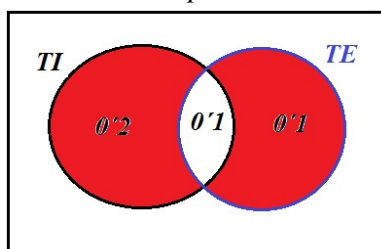
- a) Hay que calcular $P(TI \cup TE)$

$$P(TI \cup TE) = P(TI) + P(TE) - P(TI \cap TE) = 0.3 + 0.2 - 0.1 = 0.4$$

- b) Hay que calcular $P\left(\frac{TI}{TE}\right)$

$$P\left(\frac{TI}{TE}\right) = \frac{P(TI \cap TE)}{P(TE)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

- c) Para calcular la probabilidad de que sea un técnico que tiene solo una de las dos especialidades utilizamos el diagrama de Venn. La representación de la probabilidad pedida es la zona coloreada:



Por tanto, $P(\text{sea técnico que tiene solo una de las dos especialidades}) = 0.2 + 0.1 = 0.3$