

Modelo 4 de 2009

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

Para $x \leq 3$, $f = x^2(3 - x)$; para $x > 3$, $f = x^2(x - 3)$. Ambas ramas valen 0 en 3, por lo que es continua. Las derivadas laterales en 3 son -9 y 9 , luego no es derivable allí. En el primer tramo, $f' = 3x(2 - x)$; en el segundo, $f' = 3x(x - 2)$. El signo muestra que decrece en $(-\infty, 0)$, crece en $(0, 2)$, decrece en $(2, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$. Tiene mínimos en $(0, 0)$ y $(3, 0)$, y máximo local en $(2, 4)$.

Opción A · Ejercicio 2

En $x = e$, $f(e) = 2$ y $f'(e) = 1/e$, por lo que la tangente es $y = 1 + x/e$. El recinto está limitado por la recta, el eje de abscisas y la curva: la recta corta el eje en $x = -e$, mientras f lo corta en $x = e^{-1}$. Además, la tangente queda por encima de f entre e^{-1} y e . Por tanto,

$$A = \int_{-e}^{e^{-1}} \left(1 + \frac{x}{e}\right) dx + \int_{e^{-1}}^e \left(\frac{x}{e} - \ln x\right) dx = e - \frac{1}{e}.$$

El área es $\boxed{e - e^{-1}}$.

Opción A · Ejercicio 3

a) $\det A = 3 \cdot 2 - 7 = -1 \neq 0$, así que existe inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) De $XA = A + 2B$ se sigue $X = (A + 2B)A^{-1}$; de $AY = A + 2B$, $Y = A^{-1}(A + 2B)$. Como $A + 2B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -9 & 32 \\ 20 & -67 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -59 & 40 \\ 26 & -17 \end{pmatrix}}.$$

Opción A · Ejercicio 4

La recta r tiene dirección $d = (-2, -1, 1)$, obtenida del producto vectorial de las normales de sus dos planos. El plano buscado debe tener normal perpendicular a d y al normal de π , $n = (2, 1, 3)$, para que sea paralelo a r y perpendicular a π . Un normal adecuado es $n \times d = (4, -8, 0)$, proporcional a $(1, -2, 0)$. Al pasar por $P = (1, 0, -2)$:

$$\boxed{x - 2y - 1 = 0}.$$

Para el apartado b), parametrizamos $r = (1, 0, 2) + t(2, 1, -1)$. El punto de corte con el plano buscado debe estar unido a P por un vector paralelo a π , es decir, ortogonal a n . Si $Q = (1 + 2t, t, 2 - t)$,

$$(Q - P) \cdot n = (2t, t, 4 - t) \cdot (2, 1, 3) = 2t + 12 = 0,$$

por lo que $t = -6$ y $Q = (-11, -6, 8)$. La dirección $Q - P = (-12, -6, 10)$ puede simplificarse a $(-6, -3, 5)$. Así, la recta pedida es

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 0, -2) + s(-6, -3, 5), \quad s \in \mathbb{R}}.$$

Opción B · Ejercicio 1

Para que f sea continua en $x = 1$, igualamos a con el límite de la primera rama. Reescribimos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\ln x)^2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} x \left(\frac{\ln x}{x - 1} \right)^2 = 1,$$

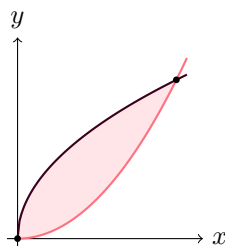
por lo que $a = 1$. Para la asíntota horizontal estudiamos el límite cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

La gráfica tiene la asíntota horizontal $y = 0$.

Opción B · Ejercicio 2

Los cortes de $f(x) = \sqrt{3x}$ y $g(x) = x^2/3$, con $x \geq 0$, satisfacen $x = 0$ o $x = 3$. En $(0, 3)$, $f > g$. El esbozo del recinto es



Así, el área es

$$A = \int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{x^2}{3} \right) dx = 6 - 3 = 3.$$

Opción B · Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ \lambda & 1 & 1 & 4 \end{array} \right), \quad \det A = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Si $\lambda \neq 1, 3$, el determinante no se anula y el sistema es SCD. Para $\lambda = 3$, las dos primeras filas de coeficientes coinciden pero sus términos independientes son distintos; $\text{rg } A = 2$ y $\text{rg } A^* = 3$, así que es SI. Para $\lambda = 1$, la primera y tercera ecuaciones coinciden; la segunda menos la primera da $2y = 1$. Queda $x + z = 7/2$, por lo que $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$ y el sistema es SCI:

$$(x, y, z) = \left(t, \frac{1}{2}, \frac{7}{2} - t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B · Ejercicio 4

La recta tiene punto $A = (2, -1, 2)$ y dirección $d = (2, 1, 2)$. El normal del plano dado es $n = (3, -2, -2)$ y $d \cdot n = 0$, así que r es paralela a π . a) El plano paralelo a π tiene el mismo normal y pasa por A :

$$3(x - 2) - 2(y + 1) - 2(z - 2) = 0 \implies 3x - 2y - 2z - 4 = 0.$$

b) Para que un plano que contiene a r sea ortogonal a π , su normal debe ser perpendicular a d y a n . El vector $d \times n = (2, 10, -7)$ cumple ambas condiciones. Pasando por A :

$$2(x - 2) + 10(y + 1) - 7(z - 2) = 0 \implies 2x + 10y - 7z + 20 = 0.$$