

Junio de 2012 · Convocatoria ordinaria

El examen permite elegir una de las dos opciones; aquí resolvemos ambas. En cada apartado explicamos qué hay que encontrar, qué regla usamos y cómo sustituimos los datos. Cuando hay un parámetro, comparamos los rangos para saber si el sistema tiene una solución, muchas o ninguna.

Opción A

Problema A.1 · Discusión de un sistema con parámetro

El sistema es

$$S_{\alpha} : \begin{cases} 2x + \alpha^2 z = 5, \\ x + (1 - \alpha)y + z = 1, \\ x + 2y + \alpha^2 z = 1. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su matriz ampliada son

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1 - \alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad A_{\alpha}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha^2 & 5 \\ 1 & 1 - \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 & 1 \end{array} \right).$$

Determinante y casos del parámetro. Para saber cuándo el rango de una matriz cuadrada de orden 3 es 3, calculamos su determinante. Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A_{\alpha} &= 2 \begin{vmatrix} 1 - \alpha & 1 \\ 2 & \alpha^2 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 - \alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2((1 - \alpha)\alpha^2 - 2) + \alpha^2(1 + \alpha) \\ &= -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4 \\ &= -(\alpha - 2)^2(\alpha + 1). \end{aligned}$$

Por tanto, el determinante se anula exactamente para $\alpha = -1$ y $\alpha = 2$. Si $\alpha \neq -1, 2$, entonces $\det A_{\alpha} \neq 0$, de modo que $\text{rg}(A_{\alpha}) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3: no puede superar el número de filas y contiene a la matriz de coeficientes. Por Rouché-Frobenius,

$$\text{rg}(A_{\alpha}) = \text{rg}(A_{\alpha}^*) = 3 = \text{número de incógnitas},$$

así que para esos valores el sistema es **compatible determinado** (una solución).

a) Resuelve el sistema para $\alpha = 0$.

Al sustituir $\alpha = 0$, la matriz de coeficientes queda

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A_0 = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

El sistema tiene solución única. Resolvemos las ecuaciones en orden:

$$2x = 5 \implies x = \frac{5}{2},$$

$$x + 2y = 1 \implies \frac{5}{2} + 2y = 1 \implies y = -\frac{3}{4},$$

$$x + y + z = 1 \implies \frac{5}{2} - \frac{3}{4} + z = 1 \implies z = -\frac{3}{4}.$$

Así, la solución única es $(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.

b) Todas las soluciones cuando $\alpha = -1$

Sustituimos el parámetro en ambas matrices:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{-1}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

El determinante de A_{-1} es cero, así que su rango es menor que 3. El menor de orden 2 formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2 vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Luego $\text{rg}(A_{-1}) = 2$. En la ampliada las filas 2 y 3 son iguales, incluidos los términos independientes, por lo que su rango no supera 2; el mismo menor no nulo prueba que sí es 2. Por tanto,

$$\text{rg}(A_{-1}) = \text{rg}(A_{-1}^*) = 2 < 3.$$

Por Rouché–Frobenius, el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones). Resolvemos las dos ecuaciones distintas. Tomamos $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x + t = 5 &\implies x = \frac{5-t}{2}, \\ \frac{5-t}{2} + 2y + t = 1 &\implies 4y + t = -3 \implies y = -\frac{3+t}{4}. \end{aligned}$$

La familia de todas las soluciones es

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{2}, -\frac{3}{4} - \frac{t}{4}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Determina el valor de α para el que el sistema es incompatible.

Solo hay que examinar los dos casos en que el determinante se anula.

Para $\alpha = -1$ acabamos de comprobar que los dos rangos valen 2, así que ese caso es compatible indeterminado, no incompatible.

Para $\alpha = 2$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det A_2 = 0.$$

El menor superior izquierdo de orden 2 es $-2 \neq 0$; por ello $\text{rg}(A_2) = 2$. En la ampliada tomamos las columnas de x, y y del término independiente:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-3) + 5(3) = 9 \neq 0.$$

Este menor de orden 3 muestra que $\text{rg}(A_2^*) = 3$. Los rangos son distintos, por Rouché–Frobenius el sistema es **incompatible**. La respuesta es

$$\alpha = 2.$$

Problema A.2 · Intersección de rectas, plano y distancia

Las rectas ya están dadas en forma paramétrica:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha, \\ y = \alpha, \\ z = 2 - \alpha, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = -1, \\ y = 1 + \beta, \\ z = -1 - 2\beta. \end{cases}$$

a) Punto de corte.

En el punto de intersección las tres coordenadas de ambas rectas deben coincidir. Igualamos las coordenadas x e y :

$$1 + 2\alpha = -1 \implies \alpha = -1, \quad -1 = 1 + \beta \implies \beta = -2.$$

Comprobamos la tercera coordenada: $2 - (-1) = 3$ y $-1 - 2(-2) = 3$. Sustituyendo en cualquiera de las rectas obtenemos

$$\boxed{P = (-1, -1, 3)}.$$

b) Plano que contiene las dos rectas.

De las ecuaciones paramétricas leemos los vectores directores

$$\vec{d}_1 = (2, 1, -1), \quad \vec{d}_2 = (0, 1, -2).$$

Un vector normal al plano es el producto vectorial de esas direcciones:

$$\vec{n} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 4, 2).$$

La forma general de un plano de normal (a, b, c) que pasa por (x_0, y_0, z_0) es $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Usamos $P = (-1, -1, 3)$:

$$-(x + 1) + 4(y + 1) + 2(z - 3) = 0 \implies \boxed{x - 4y - 2z + 3 = 0}.$$

Comprobamos que las dos direcciones son paralelas al plano: $\vec{n} \cdot \vec{d}_1 = -2 + 4 - 2 = 0$ y $\vec{n} \cdot \vec{d}_2 = 4 - 4 = 0$. Además, el plano pasa por P ; por tanto, contiene ambas rectas.

c) Distancia de $Q = (0, 0, 1)$ a la recta r_2 .

Para un punto Q y una recta que pasa por R con dirección $\vec{d}$, la distancia es

$$d(Q, r) = \frac{\|\vec{RQ} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

Tomamos $R = (-1, 1, -1)$, que pertenece a r_2 cuando $\beta = 0$, y $\vec{d}_2 = (0, 1, -2)$. Entonces

$$\vec{RQ} = Q - R = (1, -1, 2),$$

$$\vec{RQ} \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0, 2, 1).$$

La norma del producto vectorial es $\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, y la del vector director es $\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$. Por tanto,

$$\boxed{d(Q, r_2) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1}.$$

Problema A.3 · Función logarítmica, tangente y área

La función es $f(x) = 4x \ln x$. El logaritmo natural solo existe si su argumento es positivo, así que

$$\text{Dom}(f) = (0, +\infty).$$

a) Abscisa del mínimo relativo.

Derivamos usando la regla del producto, $(uv)' = u'v + uv'$, y $(\ln x)' = 1/x$:

$$f'(x) = 4 \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) = 4(\ln x + 1).$$

Igualemos la derivada a cero para hallar los puntos críticos:

$$4(\ln x + 1) = 0 \implies \ln x = -1 \implies x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

En el dominio no hay puntos excluidos. Comprobamos el signo a cada lado del punto crítico:

Tabla de signos de $f'(x)$

Intervalo o punto	Sustitución en $\ln x + 1$	Signo de $f'(x)$	Conclusión
$(0, 1/e)$	$x = e^{-2} : -2 + 1 = -1$	-	Decrece
$x = 1/e$	$f'(1/e) = 0$, cambia de - a +		Mínimo relativo
$(1/e, +\infty)$	$x = 1 : \ln 1 + 1 = 1$	+	Crece

El cambio de signo de negativo a positivo confirma un mínimo. Su ordenada es

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 4 \cdot \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{4}{e}.$$

El mínimo relativo está en $(1/e, -4/e)$; la abscisa solicitada es $x = 1/e$.

Comprobación de asíntotas. La única frontera finita del dominio es $x = 0$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x \ln x = 0,$$

por lo que no hay asíntota vertical en $x = 0$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, $4x \ln x \rightarrow +\infty$; no existe asíntota horizontal. Para que hubiera una oblicua, la pendiente $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$ tendría que ser finita; pero

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \ln x = +\infty.$$

Así que no hay asíntota oblicua. En conclusión, la función no tiene asíntotas.

b) Recta tangente en $(1, 0)$.

Comprobamos que el punto pertenece a la curva: $f(1) = 4 \cdot 1 \cdot \ln 1 = 0$. La pendiente de la tangente es la derivada en $x = 1$:

$$m = f'(1) = 4(\ln 1 + 1) = 4.$$

La fórmula de la recta por (x_0, y_0) con pendiente m es $y - y_0 = m(x - x_0)$. Sustituyendo $(1, 0)$ y $m = 4$:

$$y - 0 = 4(x - 1) \implies y = 4x - 4.$$

c) Área entre la curva y el eje x , desde $x = e$ hasta $x = e^2$

En ese intervalo $x > 1$, luego $\ln x > 0$ y la curva está por encima de $y = 0$. El área entre dos curvas es la integral de «función superior menos función inferior»:

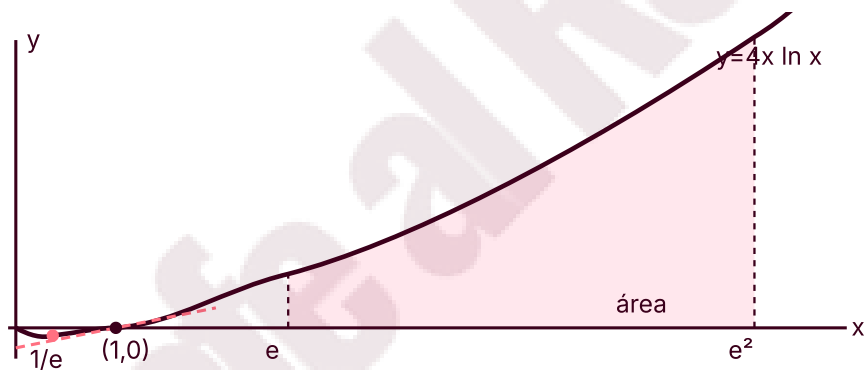
$$\mathcal{A} = \int_e^{e^2} (4x \ln x - 0) dx.$$

Desarrollamos la integral por partes, $\int u dv = uv - \int v du$, eligiendo $u = \ln x$, $du = dx/x$, $dv = 4x dx$ y $v = 2x^2$:

$$\begin{aligned} \int 4x \ln x dx &= 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \frac{dx}{x} \\ &= 2x^2 \ln x - \int 2x dx \\ &= 2x^2 \ln x - x^2 + C. \end{aligned}$$

Evaluamos la primitiva en los límites, escribiéndolos junto al corchete:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= [2x^2 \ln x - x^2]_{x=e}^{x=e^2} \\ &= (2(e^2)^2 \ln(e^2) - (e^2)^2) - (2e^2 \ln e - e^2) \\ &= (4e^4 - e^4) - (2e^2 - e^2) \\ &= \boxed{3e^4 - e^2 \text{ unidades}^2}. \end{aligned}$$



Opción B

Problema B.1 · Ecuación matricial y determinantes

a) Resuelve la ecuación matricial.

La ecuación del enunciado es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar cada fila por el vector incógnita obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 1, \\ x + y + 3z = 3, \\ x - y + z = -1. \end{cases}$$

Definimos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

La tercera fila de C es dos veces la primera menos la segunda, por lo que $\det C = 0$ y $\text{rg}(C) < 3$. El menor de orden 2 de las filas 1 y 2 y columnas 1 y 2 es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(C) = 2$. En la ampliada se mantiene la misma dependencia, ahora incluyendo el término independiente:

$$2(1, 0, 2 \mid 1) - (1, 1, 3 \mid 3) = (1, -1, 1 \mid -1).$$

Por ello $\text{rg}(C^*) = 2$. Como

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(C^*) = 2 < 3,$$

Rouché–Frobenius clasifica el sistema como compatible indeterminado. Ponemos $z = t$. De la primera ecuación,

$$x = 1 - 2t.$$

Al sustituir en la segunda,

$$(1 - 2t) + y + 3t = 3 \implies y = 2 - t.$$

La tercera se satisface automáticamente por la dependencia ya comprobada. Todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (1 - 2t, 2 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Determinante de B , sabiendo que B es invertible y $B^2 = B$.

La propiedad del determinante de un producto es $\det(XY) = \det X \det Y$. Si llamamos $d = \det B$, al tomar determinantes en $B^2 = B$ obtenemos

$$\det(B^2) = \det B \implies (\det B)^2 = \det B \implies d^2 = d.$$

Entonces $d(d - 1) = 0$, así que $d = 0$ o $d = 1$. Como B es invertible, su determinante no puede ser cero. Por tanto,

$$\boxed{\det B = 1}.$$

c) **Determinante de A , con $A^2 - 9I = 0$, A de orden 4 y $\det A > 0$**

Despejamos primero A^2 :

$$A^2 - 9I = 0 \implies A^2 = 9I.$$

Tomamos determinantes en ambos lados. Como A es de orden 4, multiplicar la identidad por 9 multiplica su determinante por 9^4 :

$$(\det A)^2 = \det(A^2) = \det(9I) = 9^4 = 6561.$$

Así, $\det A = \pm\sqrt{6561} = \pm 81$. El dato $\det A > 0$ elige la solución positiva:

$$\boxed{\det A = 81}.$$

Problema B.2 · Posiciones relativas de una recta y un plano

La recta se da como intersección de dos planos. Para trabajar con ella, la pasamos a forma paramétrica. Tomamos $y = t$:

$$r : \begin{cases} x - 2y - 2z = 1, \\ x + 5y - z = 0. \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera,

$$-7y - z = 1 \implies z = -1 - 7t.$$

Sustituimos en $x + 5y - z = 0$:

$$x + 5t - (-1 - 7t) = 0 \implies x = -1 - 12t.$$

Por tanto,

$$r : \begin{cases} x = -1 - 12t, \\ y = t, \\ z = -1 - 7t, \end{cases} \quad \vec{d}_r = (-12, 1, -7).$$

El plano ya está en forma general:

$$\pi : 2x + y + nz = p,$$

donde $n, p \in \mathbb{R}$.

a) **Valores de n para los que la intersección es un punto.**

Sustituimos la recta paramétrica en el plano:

$$2(-1 - 12t) + t + n(-1 - 7t) = p,$$

$$(-2 - n) + (-23 - 7n)t = p.$$

También podemos justificarlo con Rouché–Frobenius. El sistema formado por las dos ecuaciones de la recta y la del plano tiene matriz de coeficientes y ampliada

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & n \end{pmatrix}, \quad C^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & n & p \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante de C :

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} = 7n + 23.$$

Si $7n + 23 \neq 0$, los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada valen 3, igual al número de

incógnitas; el sistema es compatible determinado y la recta corta al plano en un punto. Luego, $n \neq -\frac{23}{7}$.

b) Valores de n, p para que la recta esté contenida en el plano.

La recta queda contenida cuando todos sus puntos satisfacen la ecuación del plano. En la expresión obtenida por sustitución, eso exige que el coeficiente de t sea cero y que el término constante sea p :

$$-23 - 7n = 0 \implies n = -\frac{23}{7},$$

$$p = -2 - n = -2 + \frac{23}{7} = \frac{9}{7}.$$

Comprobamos también los rangos. Para $n = -23/7$, el menor de orden 2 de las dos primeras filas y columnas 1 y 2 vale

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(C) = 2$. Un menor de orden 3 de la ampliada, usando las columnas de x, y y el término independiente, vale

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & p \end{vmatrix} = 7p - 9.$$

Para $p = 9/7$ este menor se anula. Además, se comprueba la dependencia de la tercera fila de la ampliada:

$$(2, 1, -23/7 \mid 9/7) = \frac{9}{7}(1, -2, -2 \mid 1) + \frac{5}{7}(1, 5, -1 \mid 0).$$

Por tanto, $\text{rg}(C^*) = 2$, igual al rango de C y menor que 3. Por Rouché–Frobenius hay infinitos puntos comunes: es la recta contenida en el plano. Así,

$$n = -\frac{23}{7}, p = \frac{9}{7}.$$

c) Valores para que la recta no corte al plano.

Para que no haya puntos comunes, el determinante de C debe ser cero, es decir, $n = -23/7$, y el sistema debe resultar incompatible. En ese caso $\text{rg}(C) = 2$. La ampliada tendrá rango 3 cuando el menor anterior no sea cero:

$$7p - 9 \neq 0 \implies p \neq \frac{9}{7}.$$

Los rangos son entonces distintos, por Rouché–Frobenius el sistema es incompatible y la recta no corta al plano:

$$n = -\frac{23}{7}, p \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{9}{7} \right\}.$$

Problema B.3 · Áreas para el diseño de un escudo

El triángulo tiene vértices $A = (0, 12)$, $B = (-x, x^2)$ y $C = (x, x^2)$. Como C es el vértice de la derecha, $x > 0$. La condición $x^2 < 12$ da el dominio geométrico

$$0 < x < \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

a) Área del triángulo en función de x .

La base horizontal BC va de $-x$ a x , así que mide $x - (-x) = 2x$. La altura es la diferencia entre las ordenadas de A y de la base: $12 - x^2$. Usamos la fórmula del área de un triángulo, base por altura dividido

entre 2: $A_T(x) = \frac{(2x)(12-x^2)}{2} = 12x - x^3$, para $0 < x < 2\sqrt{3}$. Por tanto, $A_T(x) = 12x - x^3$.

b) Vértices para que el área del triángulo sea máxima.

Derivamos la función del área y buscamos los puntos críticos del dominio:

$$A'_T(x) = 12 - 3x^2, A'_T(x) = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2.$$

Como el dominio exige $x > 0$, solo sirve $x = 2$, que pertenece a $(0, 2\sqrt{3})$. Comprobamos el signo a ambos lados:

Intervalo o punto	Sustitución en $12 - 3x^2$	Signo	Comportamiento
$(0, 2)$	$x = 1 : 12 - 3 = 9$	+	Crece
$x = 2$	$A'_T(2) = 0$, cambia de + a -	0	Máximo
$(2, 2\sqrt{3})$	$x = 3 : 12 - 27 = -15$	-	Decrece

Además, $A_T(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y cuando $x \rightarrow (2\sqrt{3})^-$. Por tanto, el máximo relativo es también absoluto. Al sustituir $x = 2$, las coordenadas son $B = (-2, 2^2) = (-2, 4)$ y $C = (2, 2^2) = (2, 4)$. El área máxima del triángulo vale $A_T(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 24 - 8 = 16 \text{ unidades}^2$.

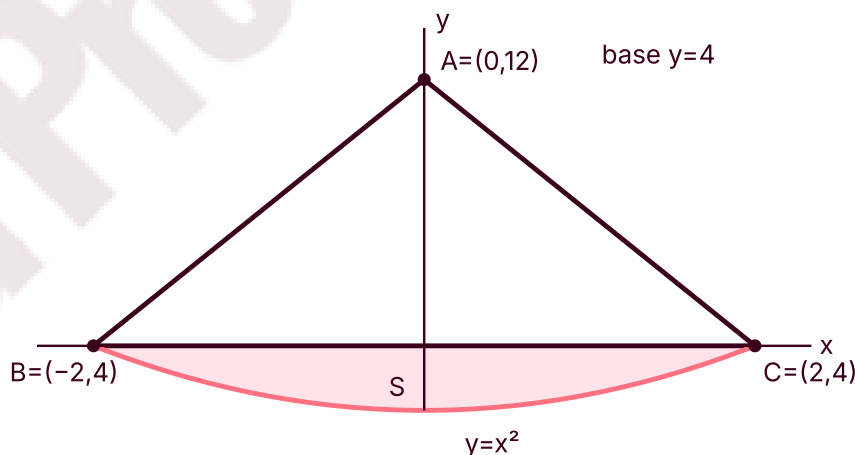
c) Área de la superficie entre $y = 4$ y $y = x^2$

En el intervalo $[-2, 2]$, la recta $y = 4$ es la curva superior y la parábola $y = x^2$ la inferior. El área se calcula integrando «superior menos inferior»:

$$A_S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx.$$

Integramos cada término, $\int 4 dx = 4x$ y $\int x^2 dx = x^3/3$, y evaluamos en los extremos:

$$\begin{aligned} A_S &= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-2}^{x=2} \\ &= \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3} \text{ unidades}^2. \end{aligned}$$



d) Área total del escudo.

El triángulo y la superficie añadida comparten únicamente el borde $y = 4$, así que el área total es la suma de las dos áreas:

$$A_{\text{total}} = A_T(2) + A_S = 16 + \frac{32}{3} = \frac{48}{3} + \frac{32}{3} = \frac{80}{3} \text{ unidades}^2.$$