

OPCIÓN A

PROBLEMA 1. En un horno mallorquín se fabrican dos tipos de ensaimadas, grandes y pequeñas. Cada ensaimada grande requiere para su elaboración 500 g. de masa y 250 g. de relleno, mientras que una pequeña requiere 250 g. de masa y 250 g. de relleno. Se dispone de 20 kg. de masa y 15 kg. de relleno. El beneficio obtenido por la venta de una ensaimada grande es de 2 euros y el de una pequeña es de 1,5 euros.

- a) ¿Cuántas ensaimadas de cada tipo tiene que fabricar el horno para que el beneficio obtenido sea máximo?
 b) ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

	<i>Masa</i>	<i>Relleno</i>	<i>Beneficio</i>
<i>Ensaïmadas grandes</i>	500 g	250 g	2 €
<i>Ensaïmadas pequeñas</i>	250 g	250 g	1'50 €
<i>Existencias</i>	20 Kg = 20000 g	15 kg = 15000 g	

Utilizamos las siguientes incógnitas

x = número de ensaimadas grandes

y = número de ensaimadas pequeñas

Las restricciones serán:

Por la cantidad de masa disponible; $500x + 250y \leq 20000$

Por la cantidad de relleno disponible; $250x + 250y \leq 15000$

Podemos simplificar ambas inecuaciones entre 250;

$$2x + y \leq 80$$

$$x + y \leq 60$$

Como x e y representan número de ensaimadas, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \in \mathbb{N}$

Los beneficios obtenidos por la venta de las ensaimadas serán: $2x + 1'5y$

- a) *Para calcular cuántas ensaimadas de cada tipo hay que fabricar para maximizar el beneficio debemos resolver el siguiente problema:*

Maximizar $z = 2x + 1'5y$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2x + y \leq 80 \\ x + y \leq 60 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $2x + y \leq 80$

(b) $x + y \leq 60$

$2x + y = 80$

$x + y = 60$

x	y
0	80
40	0

x	y
0	60
60	0

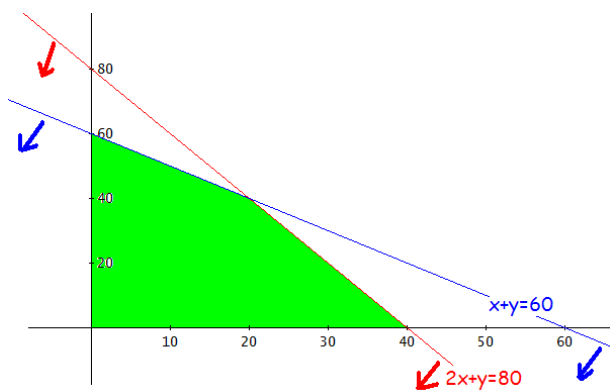
¿(0,0) cumple?

¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 0 \leq 80$ Sí

$0 + 0 \leq 60$ Sí

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

Son evidentes los vértices $(0, 0)$, $(0, 60)$ y $(40, 0)$; calculemos el otro vértice.

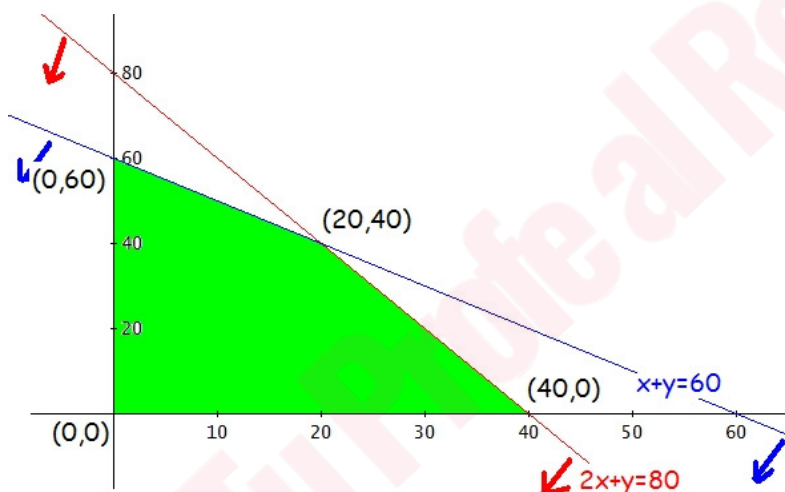
De (a) y (b):

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + y = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 80 \\ -x - y = -60 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } x = 20$$

Sustituyendo este valor de x en la 2ª ecuación, $20 + y = 60$; $y = 40$

Punto de corte $(20, 40)$



Los vértices de la región factible son: $(0, 0)$, $(0, 60)$, $(20, 40)$ y $(40, 0)$. Estos vértices tienen sus coordenadas naturales, por lo que, la función de los beneficios, z , alcanza su valor máximo en los vértices de la región anterior o en alguno de los segmentos que la delimitan.

Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 2x + 1'5y$	
$0, 0$	$2 \cdot 0 + 1'5 \cdot 0 = 0$	
$0, 60$	$2 \cdot 0 + 1'5 \cdot 60 = 90$	
$20, 40$	$2 \cdot 20 + 1'5 \cdot 40 = 100$	Máximo
$40, 0$	$2 \cdot 40 + 1'5 \cdot 0 = 40$	

El máximo se alcanza en el punto $(20, 40)$ lo cual quiere decir que para maximizar su beneficio hay que fabricar 20 ensaimadas grandes y 40 pequeñas.

b) De esta forma se conseguirá un beneficio máximo de 100 €.

OPCIÓN A

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-9}$, se pide

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Ecuación de las asíntotas horizontales y verticales.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.
- Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

Puntos de corte

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-9} = \frac{1}{-9} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{9}\right)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-9} = 0 \rightarrow x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \text{ sin soluciones reales}$$

Sólo hay un punto de corte

$$\left(0, -\frac{1}{9}\right)$$

b) Asíntota horizontal

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-9} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-9} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 1 \text{ es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales. Las posibles asíntotas verticales son las rectas $x = -3$ y $x = 3$ (corresponden a los valores de x que no son del dominio de la función)

$$x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+1}{x^2-9} = \frac{(-3)^2+1}{(-3)^2-9} = \frac{9+1}{9-9} = \frac{10}{0} = \infty \rightarrow x = -3 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+1}{x^2-9} = \frac{3^2+1}{3^2-9} = \frac{9+1}{9-9} = \frac{10}{0} = \infty \rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical}$$

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para obtener estos intervalos estudiaremos el signo de la primera derivada,

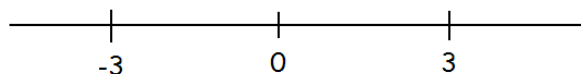
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-9) - (x^2+1)2x}{(x^2-9)^2} = \frac{2x^3-18x-2x^3-2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}$$

Estudiamos el signo de este cociente de polinomios buscando las raíces del numerador y denominador

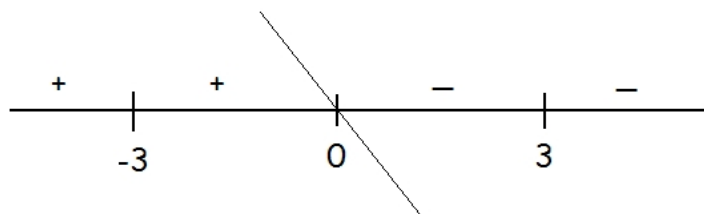
$$-20x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$(x^2-9)^2 = 0 \rightarrow x^2-9=0 \rightarrow x = \pm 3 \text{ (visto en el apartado a))}$$

Ahora representamos en la recta real los tres valores de x obtenidos y, además, los que no son del dominio de la función,



Como el denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, será positivo; luego el signo de $f'(x)$ sólo depende del signo del numerador que gráficamente es la recta $y = -20x$ (de pendiente negativa y pasa por la raíz 0), esto significa que:

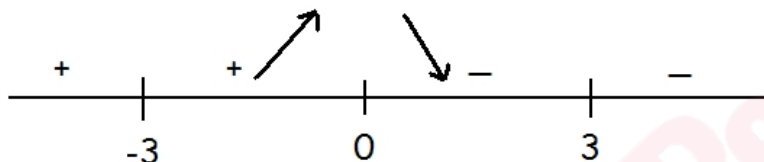


Y por lo tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ y decreciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

d) Máximos y mínimos locales.

Estos puntos los obtenemos siguiendo con el estudio realizado en el apartado anterior.

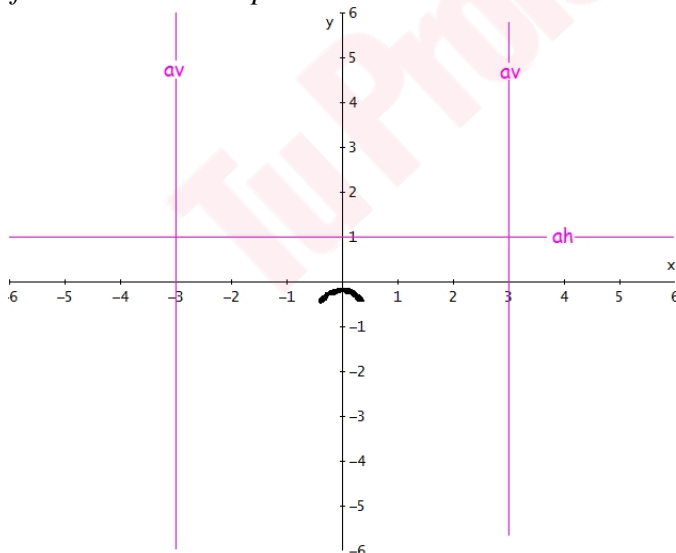
De los tres valores de x marcados en la recta real, -3 y 3 no son del dominio de $f(x)$ por lo que el posible máximo o mínimo local será $x = 0$



En $x = 0$ hay un máximo local. $x = 0, f(0) = -1/9$ (calculado en el apartado a))

Hay un máximo local en el punto $\left(0, -\frac{1}{9}\right)$

e) La información de los apartados anteriores se resume en



Para completar la representación, necesitamos situar la curva respecto de las asíntotas

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9} = (\text{para } x = -31) = \frac{(-31)^2 + 1}{(-31)^2 - 9} \infty = \frac{+}{+} \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9} = (\text{para } x = 31) = \frac{31^2 + 1}{31^2 - 9} \infty = \frac{+}{+} \infty = +\infty$$

Asíntota horizontal

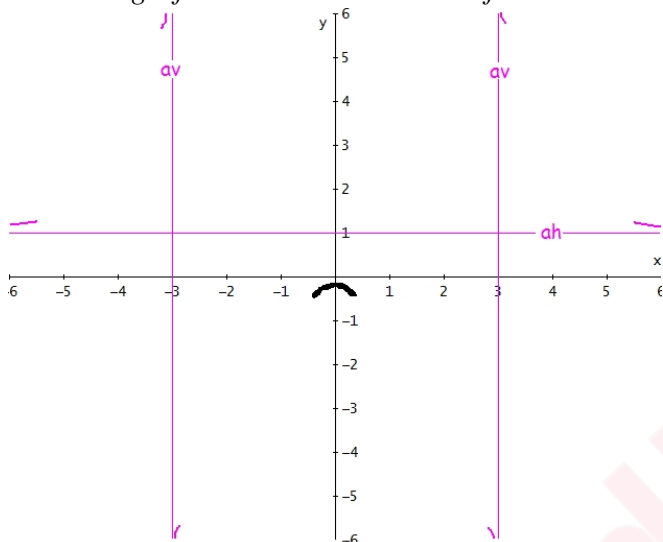
$$\text{en } -\infty, \quad x = -1000 \rightarrow \frac{(-1000)^2 + 1}{(-1000)^2 - 9} = \frac{1000001}{999991} \approx 1'...$$

$$\text{en } +\infty, \quad x = 1000 \rightarrow \frac{1000^2 + 1}{1000^2 - 9} = \frac{1000001}{999991} \approx 1'...$$

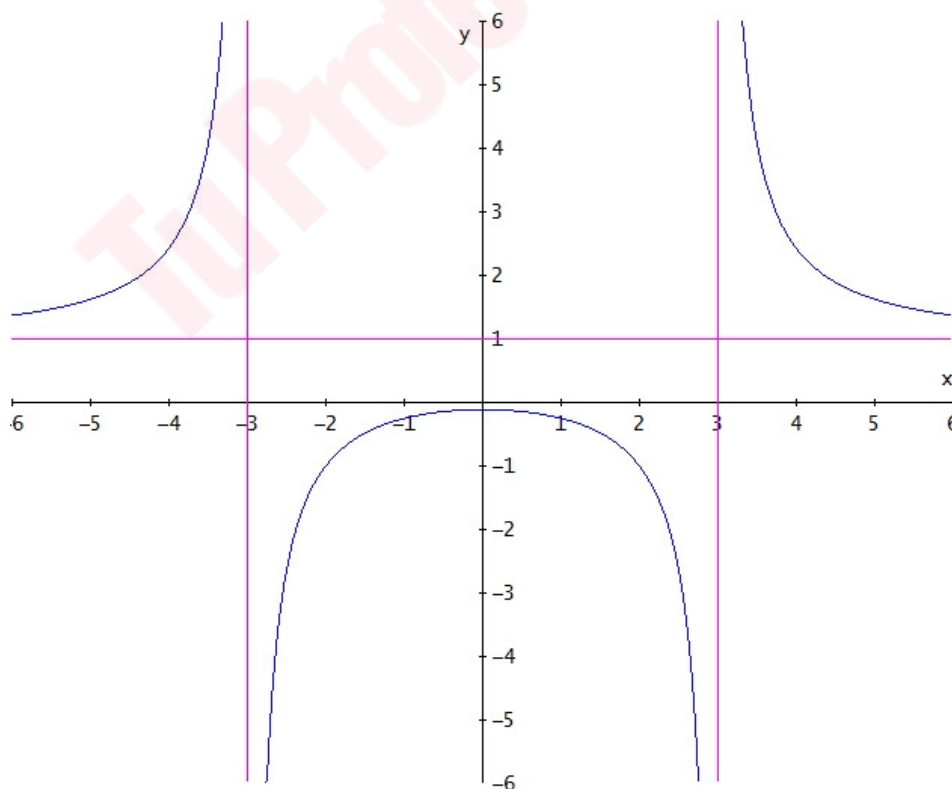
Esto significa que la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal será



Añadiendo al gráfico anterior la nueva información:



Por lo tanto la representación gráfica de $f(x)$ será:



OPCIÓN A

PROBLEMA 3. Se sabe que $p(B/A) = 0,9$, $p(A/B) = 0,2$ y $p(A) = 0,1$.

- Calcula $p(A \cap B)$ y $p(B)$
- ¿Son independientes los sucesos A y B ? ¿Por qué?
- Calcula $p(A \cup \bar{B})$, donde $\bar{B}$ representa el suceso complementario de B .

Solución:

De los datos del problema, conocemos:

$$(1) p\left(\frac{B}{A}\right) = 0,9 \rightarrow (2) \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = 0,9$$

$$(3) p\left(\frac{A}{B}\right) = 0,2 \rightarrow (4) \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = 0,2$$

$$(5) p(A) = 0,1$$

a) Calculemos $p(A \cap B)$ y $p(B)$

$$\text{A partir de las expresiones (2) y (5)} \quad \frac{p(A \cap B)}{0,1} = 0,9 \rightarrow p(A \cap B) = 0,09 \quad (6)$$

$$\text{A partir de las expresiones (4) y (6)} \quad \frac{0,09}{p(B)} = 0,2 \rightarrow p(B) = \frac{0,09}{0,2} = 0,45$$

b) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Sustituyendo los valores de las probabilidades: $0,09 = 0,1 \cdot 0,45 = 0,045$ falso

Por lo tanto A y B no son independientes.

c)

$$p(A \cup \bar{B}) = p(A) + p(\bar{B}) - p(A \cap \bar{B})$$

Calculemos las tres probabilidades de la parte derecha.

Ya conocemos el valor de $p(A) = 0,1$

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,45 = 0,55$$

La última probabilidad la obtenemos de la siguiente forma: llamando E al suceso seguro, sabemos que

$$E = B \cup \bar{B} \text{ luego, } A = A \cap E = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \text{ por lo que}$$

$$p(A) = p[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - p[(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})] =$$

$$\text{como } (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap B \cap \bar{B} = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$= p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - p(\emptyset) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - 0 = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

$$\text{Luego } p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

Sustituyendo las probabilidades conocidas queda:

$$0,1 = 0,09 + p(A \cap \bar{B}) \rightarrow p(A \cap \bar{B}) = 0,1 - 0,09 = 0,01$$

$$\text{Finalmente } p(A \cup \bar{B}) = 0,1 + 0,55 - 0,01 = 0,64$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 1. Obtén la matriz X que verifica:

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

*Solución:**Efectuamos las operaciones indicadas, número por matriz y producto de matrices $\{ (2 \times 3) \times (3 \times 1) \}$.*

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 - 1 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

pasamos sumando la matriz $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

efectuando la suma de matrices

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} \quad (a)$$

Para obtener la matriz X , hay que utilizar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$; veamos si existe.

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -24 + 8 = -16 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculamos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{-2}{16} & \frac{-4}{16} \end{pmatrix}$$

Multiplicando en la expresión (a) por la izquierda por A^{-1} ,

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{-2}{16} & \frac{-4}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{-2}{16} & \frac{-4}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$I X = \begin{pmatrix} \frac{48}{16} - \frac{32}{16} \\ \frac{-16}{16} + \frac{32}{16} \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 2. La siguiente función representa la valoración de una empresa en millones de euros en función del tiempo, t , a lo largo de los últimos 13 años:

$$f(t) = \begin{cases} 5 - 0,1t & 0 \leq t < 5 \\ 4,5 + 0,05(t - 5) & 5 \leq t < 10 \\ 4,75 + 0,1(t - 10)^2 & 10 \leq t \leq 13 \end{cases}$$

Estudia analíticamente en el intervalo $[0, 13]$:

- Si la función $f(t)$ es o no continua, indicando en caso negativo los puntos de discontinuidad.
- Instante t en el que la valoración de la empresa es máxima y dicha valoración máxima.
- Instante t en el que la valoración de la empresa es mínima y dicha valoración mínima.

Solución:

a) La función $f(t)$ está definida mediante tres ramas que son funciones polinómicas y, por tanto, funciones continuas en sus correspondientes intervalos abiertos de definición.

Estudiamos la continuidad en los puntos de cambio de definición,

$t=5$

$$f(5) = 4,5 + 0,05(5 - 5) = 4,5$$

$$\lim_{t \rightarrow 5} f(t) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 5^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} (5 - 0,1t) = 5 - 0,1 \cdot 5 = 4,5 \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (4,5 + 0,05(t - 5)) = 4,5 + 0,05(5 - 5) = 4,5 \end{array} \right\} = 4,5$$

Como los valores de la función y del límite coinciden, $f(t)$ es continua en $t = 5$

$t=10$

$$f(10) = 4,75 + 0,1(10 - 10)^2 = 4,75$$

$$\lim_{t \rightarrow 10} f(t) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 10^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 10^-} (4,5 + 0,05(t - 5)) = 4,5 + 0,05(10 - 5) = 4,75 \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} (4,75 + 0,1(t - 10)^2) = 4,75 + 0,1(10 - 10)^2 = 4,75 \end{array} \right\} = 4,75$$

Como los valores de la función y del límite coinciden, $f(t)$ es continua en $t = 10$

La función está definida en el intervalo cerrado $[0, 13]$, entendemos que en $t = 0$ $f(t)$ es continua por la derecha y en $t = 13$ lo es por la izquierda.

Finalmente, $f(t)$ es continua en $[0, 13]$.

Para resolver los apartados b) y c) representamos gráficamente la función.

Las dos primeras ramas de la función son polinomios de primer grado, gráficamente líneas rectas, utilizaremos una tabla de valores para los valores inicial y final.

La tercera rama es un polinomio de segundo grado, gráficamente una parábola, utilizaremos tabla de valores y cálculo de su vértice.

recta

t	$5 - 0,1t$
0	5
5	4,5

recta

t	$4,5 + 0,05(t - 5)$
5	4,5
10	4,75

parábola

t	$4,75 + 0,1(t - 10)^2$
10	4,75
13	$4,75 + 0,1(13 - 10)^2 = 5,65$

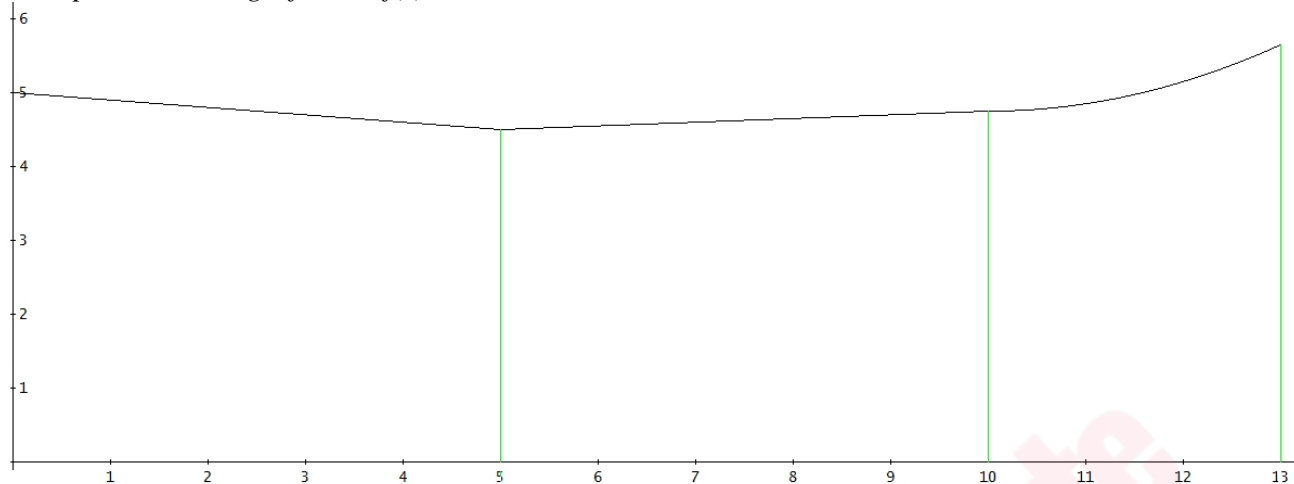
La mayoría de los cálculos están escritos directamente porque están realizados en el apartado anterior.

Obtenemos el vértice de la parábola,

$$4'75 + 0'1(t - 10)^2 = 4'75 + 0'1(t^2 - 20t + 100) = 4'75 + 0'1t^2 - 2t + 10 = 0'1t^2 - 2t + 14'75$$

Y el vértice de la parábola será, $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 0'1} = \frac{2}{0'2} = 10 \rightarrow (10, 4'75)$

La representación gráfica de $f(t)$ es,



b) La valoración máxima se alcanza a los 13 años y es de 5'65 millones de euros.

c) La valoración mínima se alcanza a los 5 años y es de 4'5 millones de euros.

OPCIÓN B

PROBLEMA 3. Al 80% de los miembros de una sociedad gastronómica les gusta el vino Raïm Negre. Entre estos, al 75% le gusta el queso de cabra. Además, a un 4% de los miembros de esta sociedad no le gusta el vino Raïm Negre ni el queso de cabra.

- ¿A qué porcentaje le gusta tanto el Raïm Negre como el queso de cabra?
- ¿A qué porcentaje no le gusta el queso de cabra?
- Si a un miembro de la sociedad le gusta el queso de cabra, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el vino Raïm Negre?
- ¿A qué porcentaje de gusta el vino Raïm Negre entre aquellos a los que no les gusta el queso de cabra?

Solución:

Vamos a utilizar la siguiente notación:

RN = miembros de la sociedad a los que les gusta el Raïm Negre

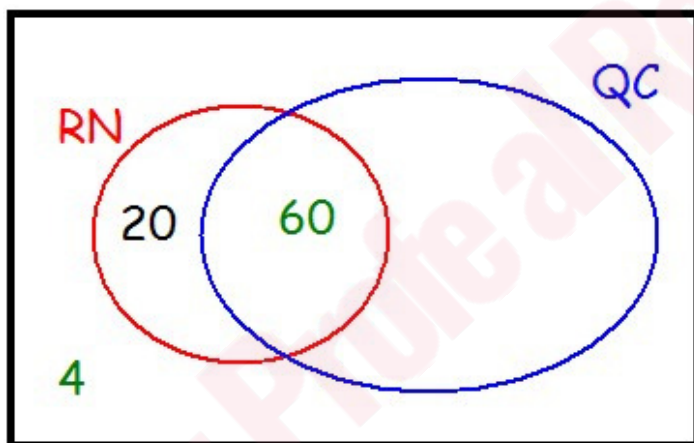
QC = “ “ “ “ “ “ “ “ “ “ queso de cabra

De los datos del problema sabemos que un 80% son RN y un 4% no son ni RN ni QC .

Además, el 75% de los RN son, también, QC . Es decir RN y QC son el 75% del 80%, es decir, $0.75 \cdot 0.80 = 0.60$, el 60%.

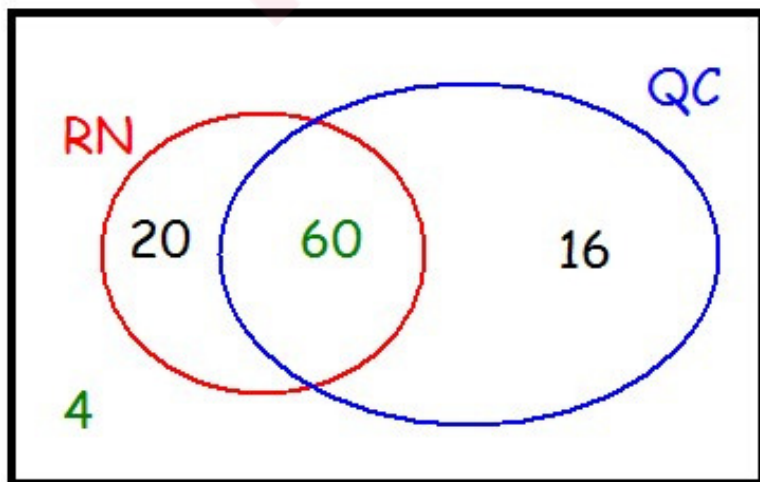
Luego los RN que no son QC serán, $80\% - 60\%$, el 20%.

Gráficamente sería:



Deduzcamos el resto de datos necesarios: sólo son QC $100 - 60 - 20 - 4 = 16$.

El diagrama completo será:



Contestamos los distintos apartados considerando el diagrama anterior.

- ¿A qué porcentaje le gusta tanto el Raïm Negre como el queso de cabra? Al 60%

b) ¿A qué porcentaje no le gusta el queso de cabra? Al 24% (20 + 4)

c) Si a un miembro de la sociedad le gusta el queso de cabra, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el vino Raïm Negre?

$$P\left(\frac{RN}{QC}\right) = \frac{P(RN \cap QC)}{P(QC)} = \frac{\frac{60}{100}}{\frac{(60+16)}{100}} = \frac{60}{76} = 0.7895$$

d) ¿A qué porcentaje de gusta el vino Raïm Negre entre aquellos a los que no les gusta el queso de cabra?

$$A \quad \frac{20}{24} = 0.8333 \rightarrow \text{al } 83.33\%$$

Tu Profecia al Rescate