

Se desarrollan las diez preguntas del examen, aunque en la prueba bastaba con elegir cinco.

### Bloque A

#### Ejercicio A.1 · Discusión de un sistema con parámetro

La matriz de coeficientes y el término independiente son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante para localizar los valores del parámetro en los que puede cambiar el rango:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -a(a+1).$$

Si  $a \neq 0, -1$ , el determinante no es nulo, por lo que el rango de  $A$  es 3; el sistema es compatible determinado.

Para  $a = -1$ , la primera y la tercera ecuación tienen el mismo lado izquierdo, pero sus términos independientes son distintos: la primera exige  $x - y = 0$  y la tercera  $x - y = -1$ . El sistema es incompatible.

Para  $a = 0$ , la primera ecuación da  $x = 0$  y las otras dos quedan  $x + 2z = 0$  y  $x + z = 0$ , de donde  $z = 0$ . La variable  $y$  queda libre, así que el sistema es compatible indeterminado. En el apartado b), la solución es

$$(x, y, z) = (0, \lambda, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En resumen: SCD si  $a \neq 0, -1$ ; SI si  $a = -1$ ; SCI si  $a = 0$ .

#### Ejercicio A.2 · Dominio, continuidad y asíntotas

La función es

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4.$$

El denominador es  $x(x+3)$ , por lo que el dominio original excluye  $x = 0$  y  $x = -3$ :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Para  $x \neq 0$  podemos simplificar el factor  $x$ :

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x + 3} + 4 = -x + 7 - \frac{5}{x + 3}.$$

Aunque la expresión simplificada tiene un valor finito en  $x = 0$ , ese punto no estaba en el dominio inicial. El límite vale  $4/3 + 4 = 16/3$ , de modo que asignar  $f(0) = 16/3$  elimina la discontinuidad evitable.

En  $x = -3$ , el término  $-5/(x+3)$  tiende a infinito con signos opuestos por cada lado; por tanto,  $x = -3$  es asíntota vertical. En  $x = 0$  el límite es finito, así que no hay asíntota vertical.

Cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , la función se comporta como  $-x + 7$ : sus límites son infinitos y no hay asíntota horizontal. La diferencia entre  $f(x)$  y  $-x + 7$  es  $-5/(x+3)$ , que tiende a cero en ambos extremos. Por ello, la asíntota oblicua en  $+\infty$  y en  $-\infty$  es la misma.

$$f(0) = \frac{16}{3} \text{ para hacerla continua; } x = -3 \text{ vertical; } y = -x + 7 \text{ oblicua en ambos extremos.}$$

#### Ejercicio A.3 · Tangente y área

a) La pendiente de la tangente en  $x = -1$  es  $f'(-1)$ . Derivamos y calculamos el punto:

$$f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x, \quad f(-1) = 0, \quad f'(-1) = 3.$$

La ecuación punto-pendiente,  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ , da

$$y = 3(x + 1).$$

b) Factorizamos la función para saber en qué intervalo queda sobre el eje de abscisas:

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2 = x^2(2 - x)(x + 1).$$

Para  $x > 0$ , es positiva en  $(0, 2)$  y negativa para  $x > 2$ . La única región acotada con el eje  $OX$  está entre los cortes  $x = 0$  y  $x = 2$ . Así, el área es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2) dx \\ &= \left[ -\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = -\frac{32}{5} + 4 + \frac{16}{3} = \frac{44}{15}. \end{aligned}$$

$$A = \frac{44}{15} \text{ unidades cuadradas.}$$

#### Ejercicio A.4 · Probabilidad total y Bayes

Sean  $C$ ,  $D$  y  $L$  los sucesos «ir al río Cuervo», «ir a las Hoces del Duratón» e «ir al Cañón del río Lobos», y sea  $R$  el suceso «llueve». Las probabilidades de las excursiones son 0,40, 0,35 y 0,25. Sumamos las probabilidades de los tres caminos que pueden producir lluvia:

$$P(R) = 0,40(0,50) + 0,35(0,60) + 0,25(0,45) = 0,5225.$$

Por complemento,  $P(R^c) = 1 - 0,5225 = 0,4775$ . Para hallar la probabilidad inversa del apartado b), usamos Bayes:

$$P(C | R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0,40(0,50)}{0,5225} = \frac{80}{209} \approx 0,3828.$$

$$P(\text{no llueve}) = 0,4775; \quad P(C | R) = \frac{80}{209} \approx 0,3828.$$

#### Ejercicio A.5 · Estimación y distribución de la media

Sea  $X$  la longitud de escritura de un bolígrafo, con desviación típica  $\sigma = 0,5$  km. Para una confianza del 95,44%, el valor crítico es  $z_{1-\alpha/2} = 2$ . El error máximo al estimar la media es  $E = z\sigma/\sqrt{n}$ ; imponemos que no supere 0,05 km:

$$\frac{2(0,5)}{\sqrt{n}} \leq 0,05 \implies n \geq \left( \frac{1}{0,05} \right)^2 = 400.$$

Si la media poblacional es 2 km y se eligen 16 bolígrafos, la media muestral sigue  $\bar{X} \sim N(2, 0,5/\sqrt{16}) = N(2, 0,125)$ . Que entre todos escriban más de 30 km equivale a  $\bar{X} > 30/16 = 1,875$ . Tipificando,

$$P(\bar{X} > 1,875) = P\left(Z > \frac{1,875 - 2}{0,125}\right) = P(Z > -1) = \Phi(1) \approx 0,8413.$$

$$n_{\min} = 400; \quad P(\text{longitud total} > 30 \text{ km}) \approx 0,8413.$$

## Bloque B

#### Ejercicio B.1 · Ecuación matricial e inversa

Para el apartado a), calculamos  $A^2$  y lo igualamos a  $5A - 4I$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^2 - 5A = \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & 4-m & -4 \end{pmatrix}.$$

Para que esta matriz sea  $-4I$ , las entradas fuera de la diagonal deben anularse; en particular,  $m-4=0$ . Con  $m=4$ , la entrada central es  $m^2-5m=16-20=-4$ , como se requiere. Por tanto, el único valor es  $m=4$ .

Para  $m=1$ ,  $\det A = 4 \neq 0$ , así que la matriz es invertible. Su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

La comprobación directa da  $AA^{-1} = I_3$ .

$$m = 4; \quad A^{-1}|_{m=1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

### Ejercicio B.2 · Región factible y extremos lineales

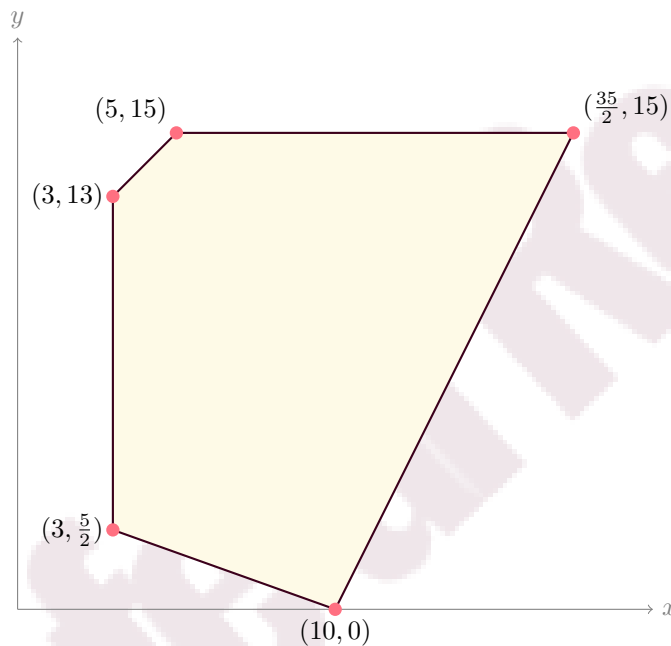
Reescribimos las desigualdades que delimitan  $S$ :

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad y \geq 5 - \frac{x}{2}, \quad y \leq x + 10, \quad y \geq 2x - 20.$$

La frontera inferior viene dada por  $y = 5 - x/2$  hasta  $x = 10$  y por  $y = 2x - 20$  a partir de ahí; ambas rectas se cortan en  $(10, 0)$ . La cota vertical  $x = 3$  aporta los vértices  $(3, 5/2)$  y  $(3, 13)$ . La cota superior  $y = 15$  se encuentra con  $y = x + 10$  en  $(5, 15)$  y con  $y = 2x - 20$  en  $(35/2, 15)$ . Así, los cinco vértices son

$$(3, \frac{5}{2}), \quad (3, 13), \quad (5, 15), \quad (\frac{35}{2}, 15), \quad (10, 0).$$

La figura muestra el recinto delimitado por esos puntos:



La función  $g(x, y) = x + y$  es lineal, así que evaluamos en los vértices:

| $(x, y)$  | $(3, \frac{5}{2})$ | $(3, 13)$ | $(5, 15)$ | $(\frac{35}{2}, 15)$ | $(10, 0)$ |
|-----------|--------------------|-----------|-----------|----------------------|-----------|
| $g(x, y)$ | $\frac{11}{2}$     | 16        | 20        | $\frac{65}{2}$       | 10        |

$$g_{\min} = \frac{11}{2} \text{ en } (3, \frac{5}{2}); \quad g_{\max} = \frac{65}{2} \text{ en } (\frac{35}{2}, 15).$$

### Ejercicio B.3 · Derivada y monotonía

La función  $f(x) = 3(x + k)e^{-x/2}$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ , puesto que el factor exponencial existe para cualquier real. Derivamos con la regla del producto:

$$f'(x) = 3e^{-x/2} - \frac{3}{2}(x + k)e^{-x/2} = \frac{3}{2}e^{-x/2}(2 - x - k).$$

Una tangente horizontal en  $x = 1$  requiere  $f'(1) = 0$ . Como  $e^{-1/2} \neq 0$ , debe cumplirse  $1 - k = 0$ , luego  $k = 1$ . El punto es  $f(1) = 6e^{-1/2}$  y la tangente horizontal tiene ecuación

$$y = 6e^{-1/2} = \frac{6}{\sqrt{e}}.$$

Para  $k = 1$ ,  $f'(x) = \frac{3}{2}e^{-x/2}(1 - x)$ . El factor exponencial es siempre positivo, de modo que el signo depende de  $1 - x$ : la función crece si  $x < 1$  y decrece si  $x > 1$ .

$$\text{Crece en } (-\infty, 1) \text{ y decrece en } (1, +\infty).$$

#### Ejercicio B.4 · Probabilidad y sucesos independientes

Sean  $M$  el suceso «se estropea el microondas»,  $H$  «se estropea el horno» y  $F$  «se conserva la factura». Se conoce  $P(M) = 0,02$ ,  $P(H) = 0,05$  y  $M, H$  son independientes. Entonces  $P(M \cap H) = 0,02(0,05) = 0,001$ . La probabilidad de que se estropee al menos uno es

$$P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0,02 + 0,05 - 0,001 = 0,069.$$

La garantía se amplía cuando se estropea el microondas; en ese grupo, el 40% no guarda la factura, así que  $P(F | M) = 0,60$ . La probabilidad conjunta pedida es

$$P(M \cap F) = P(M)P(F | M) = 0,02(0,60) = 0,012.$$

|                                               |                        |
|-----------------------------------------------|------------------------|
| $P(\text{al menos uno se estropea}) = 0,069;$ | $P(M \cap F) = 0,012.$ |
|-----------------------------------------------|------------------------|

#### Ejercicio B.5 · Intervalo para una media

La desviación típica poblacional conocida es  $\sigma = 7$  litros. La media de los diez datos es

$$\bar{x} = \frac{40 + 45 + 38 + 44 + 41 + 40 + 35 + 50 + 40 + 37}{10} = 41 \text{ litros.}$$

Para un intervalo bilateral con desviación típica conocida usamos  $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ . Con confianza del 90%,  $z_{0,95} \approx 1,645$ :

$$41 \pm 1,645 \frac{7}{\sqrt{10}} = 41 \pm 3,6414.$$

Así, el intervalo es (37,3586, 44,6414) litros.

En el apartado b), la longitud total del intervalo es  $2z\sigma/\sqrt{n}$ . Con longitud 5,  $n = 64$  y  $\sigma = 7$ ,

$$5 = 2z \frac{7}{8} \implies z = \frac{20}{7} \approx 2,857.$$

La tabla normal da  $\Phi(2,86) \approx 0,9979$ , de modo que el nivel de confianza es  $2\Phi(2,86) - 1 \approx 0,9958$ .

|                                                  |                      |
|--------------------------------------------------|----------------------|
| $IC_{90\%} = (37,3586, 44,6414) \text{ litros};$ | $C \approx 99,58\%.$ |
|--------------------------------------------------|----------------------|