



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL  
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN  
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS  
CURSO 2023-2024**

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:** a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- e) Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

**BLOQUE A.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x)$$

Halla a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa  $x = \frac{\pi}{2}$  a la recta  $y = 1$  como recta tangente, y que la recta  $y = x - 1$  corta a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

**EJERCICIO 2 (2.5 puntos)**

Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$ .

- a) **[1,5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .
- b) **[1 punto]** Halla los extremos absolutos de  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**BLOQUE B.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 3 (2.5 puntos)**

Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por  $f(x) = -x^2 + 7$  y  $g(x) = |x^2 - 1|$ .

- a) **[1 punto]** Halla los puntos de intersección de las gráficas de  $f$  y  $g$ . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.
- b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de dicho recinto.

**EJERCICIO 4 (2.5 puntos)**

Halla  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$ .



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL  
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN  
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS  
CURSO 2023-2024**

**MATEMÁTICAS II**

**BLOQUE C.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 5 (2.5 puntos)**

Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- [1,25 puntos]** Halla todas las matrices  $X$  que cumplen  $XA = -AX^t$  y  $X^2 = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 2.
- [1,25 puntos]** Halla todas las matrices  $Y$  que cumplen  $YA = AY$ , la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante  $-1$ .

**EJERCICIO 6 (2.5 puntos)**

Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

- [1,25 puntos]** ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
- [1,25 puntos]** Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es  $\frac{2}{5}$  del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

**BLOQUE D.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 7 (2.5 puntos)**

Considera el plano  $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ .

- [1 punto]** Estudia la posición relativa de  $\pi$  y  $r$ .
- [1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta contenida en  $\pi$  que pasa por el punto  $P(2, -1, -2)$  y es perpendicular a  $r$ .

**EJERCICIO 8 (2.5 puntos)**

Considera los puntos  $A(4, 0, 0)$  y  $B(0, 2, 0)$ . Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

## SOLUCIONES

**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = a + b \cos(x) + c \operatorname{sen}(x)$$

Halla  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa  $x = \frac{\pi}{2}$  a la recta  $y = 1$  como recta tangente, y que la recta  $y = x - 1$  corta a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

Si la recta  $y = 1$  es recta tangente en  $x = \frac{\pi}{2}$  significa que la función vale 1 para ese valor  $\rightarrow$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  y la pendiente de la recta tangente (recta horizontal  $\rightarrow$  pendiente = 0) es el valor

de la derivada para  $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a + b \cos(x) + c \operatorname{sen}(x) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{1 = a + c}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -b \operatorname{sen}(x) + c \cdot \cos(x) \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -b \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 = -b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La recta  $y = x - 1$  corta a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$  por lo que el valor de la función para  $x = 0$  es  $y = 0 - 1 = -1 \rightarrow f(0) = -1$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a + b \cos(x) + c \operatorname{sen}(x) \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = a + b \cos(0) + c \operatorname{sen}(0) \Rightarrow \boxed{-1 = a + b}$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + c = 1 \\ \boxed{b = 0} \\ a + b = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = 1 \\ a + 0 = -1 \rightarrow \boxed{a = -1} \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

Los valores buscados son  $a = -1$ ,  $b = 0$  y  $c = 2$ .

**EJERCICIO 2 (2.5 puntos)**

Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$ .

- a) **[1,5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .  
 b) **[1 punto]** Halla los extremos absolutos de  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x) = (1)e^{-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2} + (-2x^2 + x)e^{-x^2} = (-2x^2 + x + 1)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (-2x^2 + x + 1)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(1)}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-4} = \frac{-1}{2} = x \\ \frac{-1-3}{-4} = \frac{1}{1} = x \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos:  $x = \frac{-1}{2}$  y  $x = 1$ .

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo  $(-\infty, -1/2)$  tomamos  $x = -1$  y la derivada vale

$$f'(-1) = (-2(-1)^2 - 1 + 1)e^{-(-1)^2} = -2e^{-1} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1/2).$$

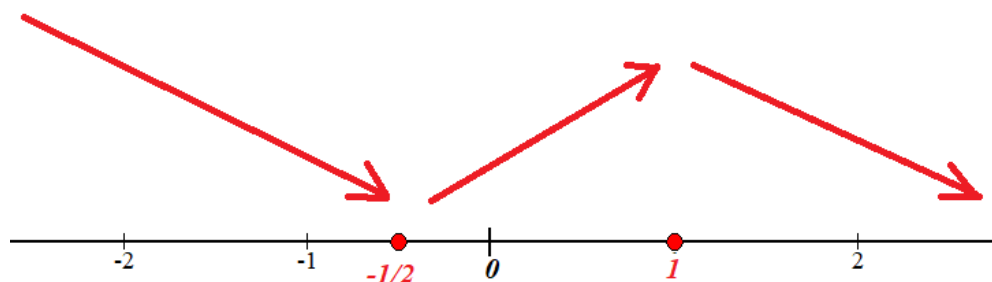
- En el intervalo  $(-1/2, 1)$  tomamos  $x = 0$  y la derivada vale

$$f'(0) = (-2(0)^2 + 0 + 1)e^{-0^2} = 1 > 0. \text{ La función crece en } (-1/2, 1).$$

- En el intervalo  $(1, +\infty)$  tomamos  $x = 2$  y la derivada vale

$$f'(2) = (-2 \cdot 2^2 + 2 + 1)e^{-2^2} = -5e^{-4} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en  $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$  y crece en  $\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$ .

- b) Observando el esquema anterior sabemos que la función tiene un mínimo relativo en  $x = \frac{-1}{2}$  y un máximo relativo en  $x = 1$ .

Para estos valores determinamos el valor de la función.

$$x = \frac{-1}{2} \rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{-(0.5)^2} = -e^{-0.25} \simeq -0.7788$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)e^{-1^2} = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} \simeq 0.1839$$

Calculamos los límites de la función cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  y a  $-\infty$  para determinar si son máximos y mínimos absolutos.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

El mínimo absoluto de la función es  $-e^{-0.25} \simeq -0.7788$  y se alcanza en  $x = \frac{-1}{2}$ .

El máximo absoluto de la función es  $\frac{1}{2e} \simeq 0.1839$  y se alcanza en  $x = 1$ .

**EJERCICIO 3 (2.5 puntos)**

Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por  $f(x) = -x^2 + 7$  y  $g(x) = |x^2 - 1|$ .

- a) [1 punto] Halla los puntos de intersección de las gráficas de  $f$  y  $g$ . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.  
 b) [1,5 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

a) Hallamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 7 \\ g(x) = |x^2 - 1| \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 7 = |x^2 - 1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + 7 = x^2 - 1 \rightarrow 8 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2} \rightarrow \begin{cases} f(-2) = -(-2)^2 + 7 = 3 \\ f(2) = -(2)^2 + 7 = 3 \end{cases} \\ -x^2 + 7 = -x^2 + 1 \rightarrow 7 = 1 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{array} \right.$$

Los puntos de corte de ambas gráficas son  $A(-2, 3)$  y  $B(2, 3)$ .

La gráfica de la función  $f$  es una parábola. Hallamos su vértice.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Hallamos la expresión de la función  $g$  como una función a trozos.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

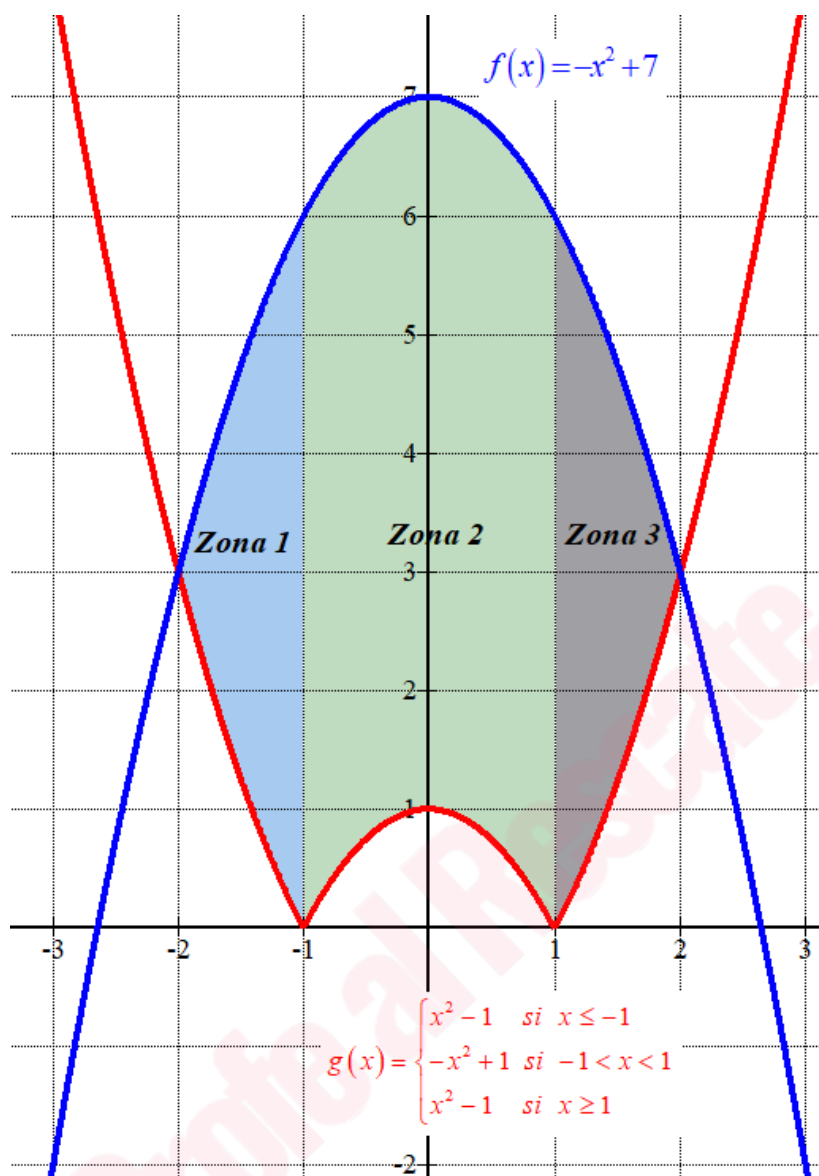
$$g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos el recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

$$f(x) = -x^2 + 7 \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

| $x$ | $y = -x^2 + 7$ |
|-----|----------------|
| -2  | 3              |
| -1  | 6              |
| 0   | 7              |
| 1   | 6              |
| 2   | 3              |

| $x$ | $y = g(x)$ |
|-----|------------|
| -2  | 3          |
| -1  | 0          |
| 0   | 1          |
| 1   | 0          |
| 2   | 3          |



b) Hallamos el área pedida obteniendo por separado el área de cada zona.

Área de zona 1.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 7 - (x^2 - 1)) dx &= \int_{-2}^{-1} -2x^2 + 8 dx = \left[ -2 \frac{x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^{-1} = \\ &= \left[ -2 \frac{(-1)^3}{3} + 8(-1) \right] - \left[ -2 \frac{(-2)^3}{3} + 8(-2) \right] = \frac{2}{3} - 8 - \frac{16}{3} + 16 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de  $\frac{10}{3}$  unidades cuadradas.

Área de zona 2.

$$\int_{-1}^1 (-x^2 + 7 - (-x^2 + 1)) dx = \int_{-1}^1 6 dx = [6x]_{-1}^1 = 6 - 6(-1) = 12$$

El área de la zona 2 tiene un valor de 12 unidades cuadradas.

Área de zona 3.

$$\begin{aligned}\int_1^2 -x^2 + 7 - (x^2 - 1) dx &= \int_1^2 -2x^2 + 8 dx = \left[ -2\frac{x^3}{3} + 8x \right]_1^2 = \\ &= \left[ -2\frac{2^3}{3} + 8 \cdot 2 \right] - \left[ -2\frac{1^3}{3} + 8 \cdot 1 \right] = -\frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

El área de la zona 3 tiene un valor de  $\frac{10}{3}$  unidades cuadradas.

El área del recinto acotado y limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$  es la suma de las áreas obtenidas:  $\frac{10}{3} + 12 + \frac{10}{3} = \frac{56}{3} \approx 18.667$  unidades cuadradas.

**EJERCICIO 4 (2.5 puntos)**

Halla  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$ .

Calculamos la integral indefinida.

$$\int e^x \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \cos(x) \rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos(x) - \int -\operatorname{sen}(x) e^x dx =$$

$$= e^x \cos(x) + \int \operatorname{sen}(x) e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \operatorname{sen}(x) \rightarrow du = \cos(x) \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) e^x - \int \cos(x) e^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos(x) dx = e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) - \int \cos(x) e^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \Rightarrow \int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx = \left[ \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[ \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right] - \left[ \frac{e^0}{2} (\cos(0) + \operatorname{sen}(0)) \right] = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}}$$

Hemos obtenido que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$ .

**EJERCICIO 5 (2.5 puntos)**

Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices  $X$  que cumplen  $XA = -AX^t$  y  $X^2 = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 2.
- b) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices  $Y$  que cumplen  $YA = AY$ , la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante  $-1$ .

a) La matriz  $X$  es una matriz  $2 \times 2$ . Consideramos  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Debe cumplirse  $XA = -AX^t$ .

$$XA = -AX^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a = a \rightarrow \boxed{a=0} \\ b = c \\ -c = -b \\ d = -d \rightarrow \boxed{d=0} \end{cases}$$

La matriz  $X$  queda  $X = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$ . También debe cumplirse  $X^2 = I$ .

$$X^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Las matrices  $X$  que cumple lo pedido son  $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

b) Consideramos  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

La suma de los elementos de su diagonal principal es cero  $\rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$ .

La matriz queda  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ . Debe cumplir  $YA = AY$ .

$$YA = AY \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -b \rightarrow \boxed{b=0} \\ c = -c \rightarrow \boxed{c=0} \end{cases}$$

La matriz queda  $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ . Su determinante es  $-1$ .

$$|Y| = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son  $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $Y_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**EJERCICIO 6 (2.5 puntos)**

Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
- b) **[1,25 puntos]** Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es  $\frac{2}{5}$  del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

- a) Llamamos “x” al precio de una unidad de perfume A, “y” al precio de una de B y “z” al precio de una de C.

“Una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros”  $\rightarrow 20x + 30y + 15z = 2200$ .

“En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros”  $\rightarrow 15x + 10y + 10z = 1250$ .

Reunimos las ecuaciones en un sistema y obtenemos sus soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 30y + 15z = 2200 \\ 15x + 10y + 10z = 1250 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \times 3 \rightarrow 12x + 18y + 9z = 1320 \\ \times (-4) \rightarrow -12x - 8y - 8z = -1000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{10y + z = 320}{z = 320 - 10y} \Rightarrow 3x + 2y + 2(320 - 10y) = 250 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 2y + 640 - 20y = 250 \Rightarrow 3x - 18y = -390 \Rightarrow x - 6y = -130 \Rightarrow \boxed{x = 6y - 130}$$

Veamos cuanto se pagaría por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C.

$$\left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ z = 320 - 10y \end{array} \right\} \Rightarrow 25x + 10y + 16z = 25(6y - 130) + 10y + 16(320 - 10y) =$$

$$= \cancel{150y} - 3250 + \cancel{10y} + 5120 - \cancel{160y} = \boxed{1870}$$

Tendremos que pagar 1870 euros por el tercer pedido.

- b) Añadimos al sistema la ecuación que nos proporciona el dato: “el precio de un perfume de tipo C es  $\frac{2}{5}$  del precio de una unidad de tipo A”  $\rightarrow z = \frac{2}{5}x$ .

Dado que hemos resuelto el sistema con las dos ecuaciones añadimos esta tercera ecuación a las soluciones obtenidas y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ z = 320 - 10y \\ z = \frac{2}{5}x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ \frac{2}{5}x = 320 - 10y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ 2x = 1600 - 50y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ x = 800 - 25y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y - 130 = 800 - 25y \Rightarrow 31y = 930 \Rightarrow y = \frac{930}{31} = 30 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \cdot 30 - 130 = 50 \\ z = 320 - 10 \cdot 30 = 20 \end{cases}$$

Una unidad del perfume A cuesta 50 €, una de B cuesta 30 € y una de C cuesta 20 €.

**EJERCICIO 7 (2.5 puntos)**

Considera el plano  $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de  $\pi$  y  $r$ .  
 b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta contenida en  $\pi$  que pasa por el punto  $P(2, -1, -2)$  y es perpendicular a  $r$ .

- a) Hallamos un vector normal del plano y un vector director de la recta.

$$\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 1)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 0) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases}$$

Comprobamos si los vectores  $\vec{n}$  y  $\vec{v}_r$  son perpendiculares.

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, -2, 1) \cdot (2, 1, 0) = 2 - 2 + 0 = 0$$

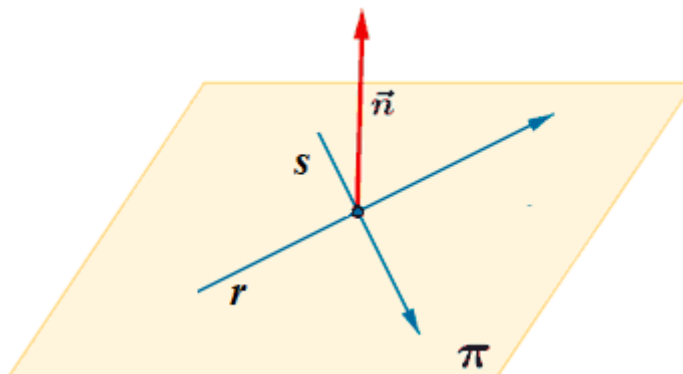
Como el producto escalar es nulo los vectores son perpendiculares, por lo que plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Comprobamos si el punto  $P_r(1, 0, 1)$  de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0 \\ \text{¿} P_r(1, 0, 1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 - 2 \cdot 0 + 1 - 2 = 0?$$

La igualdad es cierta y la recta está contenida en el plano.

- b) La recta  $s$  contenida en  $\pi$  que es perpendicular a  $r$  es perpendicular también al vector normal del plano. Por lo que nos sirve como vector director de dicha recta el producto vectorial de  $\vec{n}$  y  $\vec{v}_r$ .



Hallamos la expresión del vector director de la recta  $s$ .

$$\vec{u}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j + k + 4k - i = -i + 2j + 5k = (-1, 2, 5)$$

Hallamos la ecuación de la recta  $s$  que pasa por el punto  $P(2, -1, -2)$  y tiene vector director  $\vec{u}_s = (-1, 2, 5)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-1, 2, 5) \\ P(2, -1, -2) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

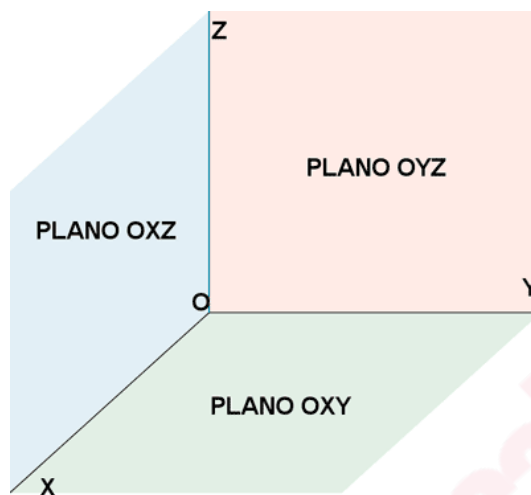
La ecuación de la recta  $s$  contenida en  $\pi$  que pasa por el punto  $P(2, -1, -2)$  y es

perpendicular a  $r$  es  $s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

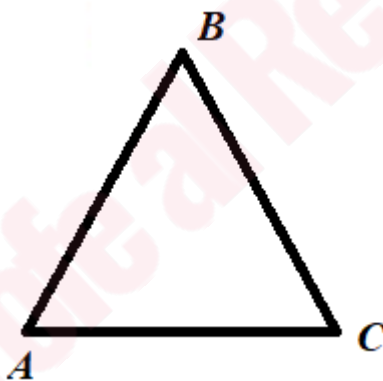
**EJERCICIO 8 (2.5 puntos)**

Considera los puntos  $A(4,0,0)$  y  $B(0,2,0)$ . Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

a) El plano OXZ tiene ecuación  $y = 0$ .



Un punto C del plano OXZ tiene coordenadas  $C(a,0,c)$ .



El triángulo ABC debe ser equilátero y para ello las distancias entre sus vértices debe ser la misma. Obtenemos la distancia del punto A al punto B.

$$\left. \begin{array}{l} A(4,0,0) \\ B(0,2,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0,2,0) - (4,0,0) = (-4,2,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

Obtenemos la expresión de la distancia del punto A al punto C y la del punto B al punto C.

$$\left. \begin{array}{l} A(4,0,0) \\ C(a,0,c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (a,0,c) - (4,0,0) = (a-4,0,c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A,C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(a-4)^2 + 0^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + 16 - 8a + c^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} B(0, 2, 0) \\ C(a, 0, c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (a, 0, c) - (0, 2, 0) = (a, -2, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{a^2 + 2^2 + c^2} = \sqrt{4 + a^2 + c^2}$$

Igualemos estas distancias a  $\sqrt{20}$  y resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} d(B, C) = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{4 + a^2 + c^2} = \sqrt{20} \Rightarrow 4 + a^2 + c^2 = 20 \\ d(A, C) = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 16 - 8a + c^2} = \sqrt{20} \Rightarrow a^2 + 16 - 8a + c^2 = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + c^2 = 16 \\ a^2 + c^2 - 8a = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 16 - 8a = 4 \Rightarrow -8a = -12 \Rightarrow \boxed{a = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + c^2 = 16 \Rightarrow \frac{9}{4} + c^2 = 16 \Rightarrow 9 + 4c^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c^2 = 55 \Rightarrow c^2 = \frac{55}{4} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{55}{4}} = \frac{\pm\sqrt{55}}{2}}$$

Los puntos buscados son  $C_1\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$  y  $C_2\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$ .