

Se desarrollan las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio A.1 · Determinante e inversa

a) La matriz es invertible si su determinante no se anula:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a - 2.$$

Resolviendo $a^2 - 2a - 2 = 0$ se obtiene $a = 1 \pm \sqrt{3}$. Por tanto, la matriz es invertible para todos los reales salvo esos dos valores.

b) Para $a = 1$, el determinante vale -3 , así que la inversa existe. El cálculo da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Se comprueba que $AA^{-1} = I_3$.

$$a \neq 1 \pm \sqrt{3}; \quad A^{-1}|_{a=1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio A.2 · Región factible y beneficio máximo

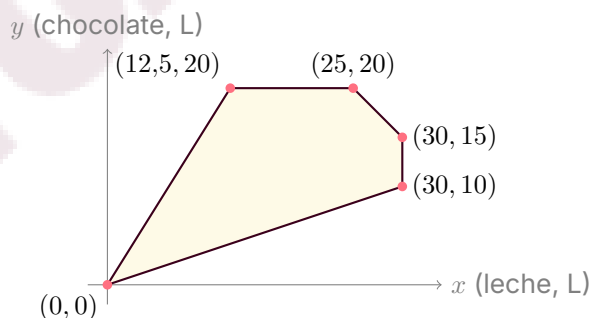
Sean x los litros de leche e y los litros de chocolate. Las existencias y las condiciones de mezcla se escriben

$$0 \leq x \leq 30, \quad 0 \leq y \leq 20, \quad x \leq 3y, \quad y \leq 1,6x, \quad x + y \leq 45.$$

El beneficio es $B(x, y) = x + 2y$. Al intersectar las rectas frontera se obtienen los vértices

$$(0, 0), \quad (12,5, 20), \quad (25, 20), \quad (30, 15), \quad (30, 10).$$

La región se muestra en el siguiente gráfico:



Como el beneficio es lineal, basta evaluarlo en los vértices:

(x, y)	$(0, 0)$	$(12,5, 20)$	$(25, 20)$	$(30, 15)$	$(30, 10)$
$x + 2y$	0	52,5	65	60	50

$$B_{\max} = 65 \text{ euros, mezclando 25 L de leche y 20 L de chocolate.}$$

Ejercicio A.3 · Lectura de una gráfica

a) La derivada es positiva en los tramos en que la gráfica asciende. Entre los puntos con tangente horizontal, se observa que la función crece desde $x = -2$ hasta el máximo de $x = -1$, vuelve a crecer desde el mínimo

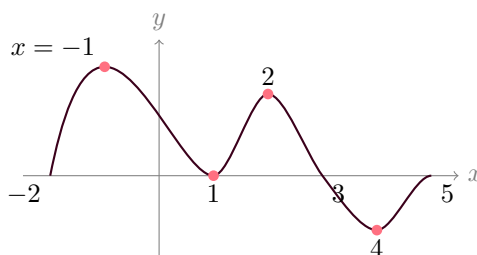
de $x = 1$ hasta el máximo de $x = 2$, y aumenta de nuevo a partir del mínimo de $x = 4$ hasta el extremo derecho representado. Por tanto, en el intervalo dibujado,

$$f'(x) > 0 \text{ en } (-2, -1) \cup (1, 2) \cup (4, 5).$$

b) Una integral definida representa el área con signo: la parte de la curva sobre el eje OX suma y la parte bajo el eje resta. En la gráfica, f es positiva entre -2 y 3 (salvo el contacto con el eje en $x = 1$) y negativa entre 3 y 5 . El área positiva acumulada es mayor que la negativa, por lo que

$$\int_{-2}^5 f(x) dx > 0.$$

El esquema propio resume los puntos de giro y los cortes observados:



$$f'(x) > 0 \text{ en } (-2, -1) \cup (1, 2) \cup (4, 5); \quad \int_{-2}^5 f(x) dx > 0.$$

Ejercicio A.4 · Probabilidad total e independencia

Sea $p = P(B)$. Separando los casos B y B^c , la probabilidad total de A es

$$P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | B^c)P(B^c).$$

Sustituimos los datos para obtener

$$0,6 = 0,4p + 0,8(1 - p) \implies p = 0,5.$$

Para que A y B fueran independientes debería cumplirse $P(A | B) = P(A)$. Sin embargo, $0,4 \neq 0,6$, así que no son independientes.

$$P(B) = 0,5; \quad A \text{ y } B \text{ son dependientes.}$$

Ejercicio A.5 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

a) Como la desviación típica es conocida, el intervalo para la media es $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Para el 99%, usamos $z_{0,995} \approx 2,576$:

$$50 \pm 2,576 \frac{2}{\sqrt{20}} = 50 \pm 1,151.$$

b) El error máximo debe cumplir $E = z_{0,95}\sigma/\sqrt{n} < 1$. Con $z_{0,95} = 1,645$ y $\sigma = 2$:

$$\frac{1,645 \cdot 2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > (3,29)^2 = 10,8241.$$

Por tanto, el menor tamaño entero válido es 11.

$$IC_{99\%} \approx (48,849, 51,151) \text{ kg}; \quad n_{\min} = 11.$$

Bloque B

Ejercicio B.1 · Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 2a(1 - a).$$

Si $a \neq 0, 1$, el rango de A es 3 y Rouché–Frobenius garantiza una única solución (SCD).

Para $a = 0$, el sistema exige $x + z = 0$ y también $x + z = 1$ (pues $y = 0$), por lo que es incompatible (SI); en este caso no existe solución.

Para $a = 1$, la primera y tercera ecuaciones coinciden, y la segunda es independiente. Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, de modo que hay infinitas soluciones (SCI). Sumando las dos primeras ecuaciones se obtiene $2x = 1$; después $y + z = 1/2$. Tomando $y = \lambda$,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \lambda, \frac{1}{2} - \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para $a = 2$, el sistema es SCD. Restando la primera y la tercera ecuación se obtiene $y = 1$. La tercera da $x + z = 0$ y la segunda, $2x - y - 2z = 0$; de ahí $x = 1/4$ y $z = -1/4$.

$$a \neq 0, 1 : \text{SCD}; \quad a = 0 : \text{SI}; \quad a = 1 : \text{SCI}; \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{4}\right) \quad (a = 2).$$

Ejercicio B.2 · Asíntotas y derivada

El denominador se anula en $x = 1$, donde el numerador vale 1, así que $x = 1$ es una asíntota vertical. La división de polinomios da

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1} + 1.$$

El término fraccionario tiende a cero en ambos infinitos, por lo que la asíntota oblicua es $y = x$. La función diverge cuando $x \rightarrow \pm\infty$, así que no tiene horizontal.

Derivando la forma anterior,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2}, \quad f'(2) = 1 - 1 = 0.$$

$$x = 1 \text{ vertical}; \quad y = x \text{ oblicua}; \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2}, \quad f'(2) = 0.$$

Ejercicio B.3 · Optimización del coste de fabricación

Sea h la altura del rectángulo; su base es $2h$ y su perímetro es $6h$. Si s es el lado del cuadrado, su perímetro es $4s$. El alambre total impone

$$4s + 6h = 450 \implies s = \frac{450 - 6h}{4} = 112,5 - 1,5h,$$

con $0 < h < 75$ para que ambas figuras tengan dimensiones positivas.

El coste (en céntimos) es la suma del coste del cuadrado, de área s^2 , y el del rectángulo, de área $2h^2$:

$$C(h) = 16s^2 + 10(2h^2) = 16(112,5 - 1,5h)^2 + 20h^2 = 56h^2 - 5400h + 202500.$$

Derivamos para encontrar el mínimo:

$$C'(h) = 112h - 5400 = 0 \implies h = \frac{675}{14} \approx 48,214 \text{ cm}.$$

Como $C''(h) = 112 > 0$, se trata de un mínimo. Entonces

$$s = \frac{1125}{28} \approx 40,179 \text{ cm}, \quad 6h \approx 289,286 \text{ cm}, \quad 4s \approx 160,714 \text{ cm}.$$

$$\text{Rectángulo: } 289,286 \text{ cm de alambre; } \text{cuadrado: } 160,714 \text{ cm}.$$

Ejercicio B.4 · Probabilidad con extracción sucesiva

Sea D el suceso «la segunda carta es de diamantes». La primera carta se elimina sin verla y todas las cartas tienen la misma probabilidad de ocupar la segunda posición; por simetría,

$$P(D) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

También se puede comprobar separando los casos de que se elimine primero un diamante o una carta de otro palo:

$$P(D) = \frac{13}{52} \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \frac{13}{51} = \frac{1}{4}.$$

Sea N el suceso «la carta observada no es de diamantes» y E el suceso «la carta eliminada tampoco era de diamantes». La probabilidad conjunta se obtiene por multiplicación a lo largo de ese camino:

$$P(E \cap N) = \frac{39}{52} \frac{38}{51}, \quad P(N) = \frac{39}{52}.$$

Así,

$$P(E | N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{38}{51}.$$

$$P(\text{segunda carta de diamantes}) = \frac{1}{4}; \quad P(E | N) = \frac{38}{51}.$$

Ejercicio B.5 · Desviación típica y probabilidad de la media

a) El punto medio del intervalo es la media muestral y la semiamplitud es el error:

$$\bar{x} = \frac{58,2 + 73,8}{2} = 66, \quad E = 73,8 - 66 = 7,8.$$

Para un intervalo del 95%, $E = 1,96 \sigma / \sqrt{10}$. Despejando,

$$\sigma = \frac{7,8\sqrt{10}}{1,96} \approx 12,585.$$

b) Si $\sigma = 20$, la desviación típica de la media de tamaño 10 es $20/\sqrt{10}$. Tipificando los dos extremos simétricos:

$$P(-10 < \bar{X} - \mu < 10) = P\left(-\frac{\sqrt{10}}{2} < Z < \frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 2\Phi(1,58) - 1 \approx 0,8858.$$

$$\bar{x} = 66, \quad \sigma \approx 12,585; \quad P(-10 < \bar{X} - \mu < 10) \approx 0,8858.$$