

Se comprueba la continuidad antes de derivar la función definida a trozos.

Opción A - Ejercicio 1

Comparamos la forma general con $f(x) = a \sin x + bx^2 + cx + d$. La tangente horizontal en $(0, 4)$ da $d = 4$ y $f'(0) = a + c = 0$. Además,

$$f''(x) = -a \sin x + 2b = 3 \sin x - 10.$$

Al comparar coeficientes, $a = -3$, $b = -5$ y, por $a + c = 0$, $c = 3$. Por tanto,

$$a = -3, \quad b = -5, \quad c = 3, \quad d = 4.$$

Opción A - Ejercicio 2

El integrando se descompone en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

En el intervalo que contiene $x = 1$, una primitiva es

$$F(x) = \ln x - \ln(x+1) + C.$$

La condición $F(1) = 1$ da $C = 1 + \ln 2$. Así,

$$F(x) = \ln x - \ln(x+1) + 1 + \ln 2, \quad x > 0.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 6 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 2 & \lambda & 6 \end{pmatrix}, \quad A_{\lambda}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & 6 & 0 \\ 2 & \lambda & 4 & 2 \\ 2 & \lambda & 6 & \lambda - 2 \end{array} \right), \quad \det A_{\lambda} = 2(\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Si $\lambda \neq \pm 2$, el determinante no se anula y hay una solución única. Para $\lambda = -2$, los rangos son 2 y 3, respectivamente, así que el sistema es incompatible. Para $\lambda = 2$, la reducción da $x + y = 3$ y $z = -1$; ambos rangos son $2 < 3$, por lo que es compatible indeterminado:

$$\lambda = 2 : (x, y, z) = (3 - t, t, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En resumen, $\lambda = -2$ es SI; $\lambda = 2$ es SCl; $\lambda \neq \pm 2$ es SCD.

Opción A - Ejercicio 4

La recta tiene punto $A_0 = (1, 0, -1)$ y vector director $\vec{d} = (2, 3, -1)$. La proyección ortogonal H de P sobre la recta se obtiene con

$$H = A_0 + t\vec{d}, \quad t = \frac{(P - A_0) \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} = \frac{(0, 1, 2) \cdot (2, 3, -1)}{14} = \frac{1}{14}.$$

Por tanto, $H = (8/7, 3/14, -15/14)$. El simétrico P' verifica que H es el punto medio de PP' , es decir, $P' = 2H - P$:

$$P' = \left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7} \right).$$

Opción B - Ejercicio 1

Analizamos los puntos de empalme 0 y 1. En $x = 0$, los límites laterales y el valor coinciden y valen 1. Sin embargo, las derivadas laterales son

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x}) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x) = 0,$$

por lo que la función no es derivable en 0. En $x = 1$, el límite por la izquierda es $1 - 1 = 0$, pero $f(1) = 2/1 + 1 = 3$; hay una discontinuidad de salto y tampoco es derivable allí. En los intervalos donde cada expresión es válida,

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x < 0, \\ -2x, & 0 < x < 1, \\ -2/x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Así, f es continua en 0, discontinua en 1 y derivable salvo en esos dos puntos.

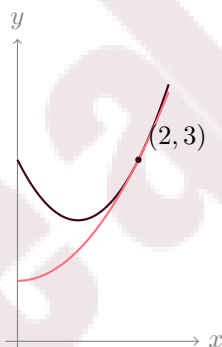
Opción B - Ejercicio 2

Iguamos las funciones para hallar el punto de corte:

$$x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \iff \frac{1}{2}(x - 2)^2 = 0,$$

de modo que se tocan en $(2, 3)$. En $[0, 2]$, la primera parábola está por encima de la segunda; además, el eje y cierra el recinto. El área es

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left[(x^2 - 2x + 3) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \boxed{\frac{4}{3}}.$$



Opción B - Ejercicio 3

Aplicamos las propiedades del determinante. Al multiplicar una matriz de orden 2 por -3 , el determinante se multiplica por $(-3)^2$:

$$\det(-3A^T) = (-3)^2 \det(A) = 9 \cdot 4 = \boxed{36}.$$

También

$$\det \begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix} = -6bc + 6ad = 6(ad - bc) = \boxed{24}.$$

Como $\det(A^{-1}) = 1/4$ y $\det(A^T) = 4$,

$$\det(A^{-1}A^T) = \frac{1}{4} \cdot 4 = \boxed{1}.$$

Finalmente, $B^3 = I$ implica $(\det B)^3 = 1$. El único número real cuyo cubo vale 1 es 1, luego $\boxed{\det B = 1}$.

Opción B - Ejercicio 4

Los puntos son alineados si y solo si $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} = (-\lambda - 2, 2 - \lambda, -\lambda), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, -1),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\lambda - 2, \lambda - 2, 4 - 2\lambda).$$

Las tres componentes se anulan para $\lambda = 2$, así que sí existe el valor pedido: $\boxed{\lambda = 2}$. Para $\lambda = 1$, un vector normal al plano es $(-1, -1, 2)$. Como $A = (2, 1, 1)$ pertenece al plano,

$$-(x - 2) - (y - 1) + 2(z - 1) = 0 \implies \boxed{x + y - 2z - 1 = 0}.$$

La distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $ax + by + cz + d = 0$ es

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Para el origen se obtiene

$$\boxed{d = \frac{1}{\sqrt{6}}}.$$