

PAU Comunidad Valenciana - Matemáticas II

Julio de 2016 · Convocatoria extraordinaria

Opción A

Problema A.1. Discusión de un sistema con parámetro

Estudiamos

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ -3x + 2y + 3z = -2, \\ 2x + ay - 5z = -4. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & a & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Determinante y clasificación según a

Calculamos primero el determinante de A :

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = (-10 - 3a) - 9 + 2(-3a - 4) = -9(a + 3).$$

Si $a \neq -3$, entonces $\det A \neq 0$ y, por tanto, $\text{rg}(A) = 3$. También $\text{rg}(A^*) = 3$, así que por Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado.

Si $a = -3$, la matriz de coeficientes queda

$$A_{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

La tercera fila es la suma de las dos primeras cambiada de signo. Además, el menor de orden 2 formado por las filas 1 y 2 y las columnas x, y vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Luego $\text{rg}(A_{-3}) = 2$. Para la matriz ampliada, el menor formado por esas tres filas y las columnas x, y y término independiente es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A_{-3}^*) = 3$. Como los rangos son distintos, el sistema es incompatible para $a = -3$.

En resumen, el sistema es compatible determinado exactamente cuando

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

a) Solución cuando $a = 0$

Al sustituir $a = 0$, las ecuaciones son

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ -3x + 2y + 3z = -2, \\ 2x - 5z = -4. \end{cases}$$

De la primera, $x = 2 - y - 2z$. La sustituimos en la segunda:

$$-3(2 - y - 2z) + 2y + 3z = -2 \implies 5y + 9z = 4.$$

La sustituimos también en la tercera:

$$2(2 - y - 2z) - 5z = -4 \implies 2y + 9z = 8.$$

Restamos la segunda igualdad de la primera: $3y = -4$, así que $y = -\frac{4}{3}$. Al volver a $2y + 9z = 8$:

$$-\frac{8}{3} + 9z = 8 \implies z = \frac{32}{27}.$$

Finalmente,

$$x = 2 - \left(-\frac{4}{3}\right) - 2\left(\frac{32}{27}\right) = \frac{26}{27}.$$

Por tanto, para $a = 0$,

$$(x, y, z) = \left(\frac{26}{27}, -\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right).$$

b) Valor de a para que el sistema sea incompatible

La discusión de rangos muestra que el único caso con rangos distintos es $a = -3$:

$$a = -3.$$

c) Solución en función del parámetro cuando el sistema es compatible determinado

Tomamos las dos primeras ecuaciones y despejamos x, y en función de z . De la primera, $x = 2 - y - 2z$. Sustituyendo en la segunda:

$$-3(2 - y - 2z) + 2y + 3z = -2 \implies 5y + 9z = 4 \implies y = \frac{4 - 9z}{5}.$$

Entonces

$$x = 2 - \frac{4 - 9z}{5} - 2z = \frac{6 - z}{5}.$$

Sustituimos ambas expresiones en la tercera ecuación:

$$2\left(\frac{6 - z}{5}\right) + a\left(\frac{4 - 9z}{5}\right) - 5z = -4.$$

Multiplcamos por 5 y agrupando:

$$12 - 2z + 4a - 9az - 25z = -20 \implies 9(a + 3)z = 4(a + 8).$$

Para $a \neq -3$,

$$z = \frac{4(a + 8)}{9(a + 3)}, \quad y = \frac{4 - 9z}{5} = -\frac{4}{a + 3}, \quad x = \frac{6 - z}{5} = \frac{2(5a + 13)}{9(a + 3)}.$$

Así, la solución única para cada $a \neq -3$ es

$$(x, y, z) = \left(\frac{2(5a+13)}{9(a+3)}, -\frac{4}{a+3}, \frac{4(a+8)}{9(a+3)} \right), a \neq -3.$$

Al poner $a = 0$ se recupera $\left(\frac{26}{27}, -\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)$, como comprobación.

Problema A.2. Plano, distancia y volumen

Se dan

$$A = (0, 0, 1), B = (1, 0, -1), C = (0, 1, -2), D = (1, 2, 0).$$

Los vectores que parten de A hacia B y C son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, -2), \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 1, -3).$$

a) Ecuación general del plano π que pasa por A, B, C

Un vector normal se obtiene con el producto vectorial:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2, 3, 1).$$

La ecuación general de un plano con normal $(2, 3, 1)$ que pasa por $A = (0, 0, 1)$ es

$$2(x - 0) + 3(y - 0) + (z - 1) = 0.$$

Por tanto,

$$\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

b) Justificación de que A, B, C, D no son coplanarios

Los cuatro puntos serían coplanarios si el producto mixto de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ fuera cero. Calculamos

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (1, 2, -1),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo prueba que los tres vectores no son coplanarios. En consecuencia, los cuatro puntos tampoco están en un mismo plano.

c) Distancia de D a π y volumen del tetraedro $ABCD$

La distancia de (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D_0 = 0$ es

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Para $D = (1, 2, 0)$ y $\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$:

$$d(D, \pi) = \frac{|2(1) + 3(2) + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Por tanto,
$$d(D, \pi) = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del valor absoluto del determinante de tres aristas con origen común. Usamos las aristas desde A :

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -2), \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3), \overrightarrow{AD} = (1, 2, -1).$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{|7|}{6}.$$

Así,

$$V_{ABCD} = \frac{7}{6}.$$

Problema A.3. Análisis de $f(x) = x^2 + |x|$

La función está definida para todo número real: x^2 y $|x|$ existen para cualquier x , y no hay denominadores ni raíces que restrinjan el dominio. Por ello,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Usaremos la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2 + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Puntos donde la gráfica corta los ejes

Para cortar el eje Y , ponemos $x = 0$:

$$f(0) = 0^2 + |0| = 0.$$

Para cortar el eje X , resolvemos $f(x) = 0$. Como $x^2 \geq 0$ y $|x| \geq 0$, la suma solo puede ser cero si ambos términos son cero; esto ocurre únicamente en $x = 0$.

La gráfica corta ambos ejes en el origen:

$$(0, 0).$$

b) Simetría respecto del eje de ordenadas

Una función es par si $f(-x) = f(x)$. Comprobamos:

$$f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x).$$

Por tanto, la curva es simétrica respecto del eje Y .

c) Crecimiento, decrecimiento y extremo relativo

Derivamos por tramos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0, \\ 2x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

En el tramo $x < 0$, la ecuación $2x - 1 = 0$ daría $x = \frac{1}{2}$, que no pertenece a ese tramo; además $2x - 1 < 0$ para todo $x < 0$. En el tramo $x > 0$, $2x + 1 = 0$ daría $x = -\frac{1}{2}$, también fuera del tramo; allí $2x + 1 > 0$. En $x = 0$ la derivada no existe, pues las derivadas laterales son -1 y 1 .

Comprobamos el signo con un valor de prueba en cada intervalo:

Intervalo	Sustitución en f'	Signo y comportamiento
$(-\infty, 0)$	$f'(-1) = 2(-1) - 1 = -3 < 0$	- Decreciente
$x = 0$	$f'(0)$ no existe; $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$	- $\rightarrow$ + Mínimo en $(0, 0)$
$(0, \infty)$	$f'(1) = 2(1) + 1 = 3 > 0$	+ Creciente

La función decrece hasta $x = 0$ y crece después. Como $f(0) = 0$, tiene un mínimo relativo (y absoluto) en

$$(0, 0).$$

Asíntotas: comprobación

No hay asíntotas verticales porque el dominio es todo $\mathbb{R}$ y la función no tiene puntos finitos donde deje de estar definida. Tampoco hay horizontales:

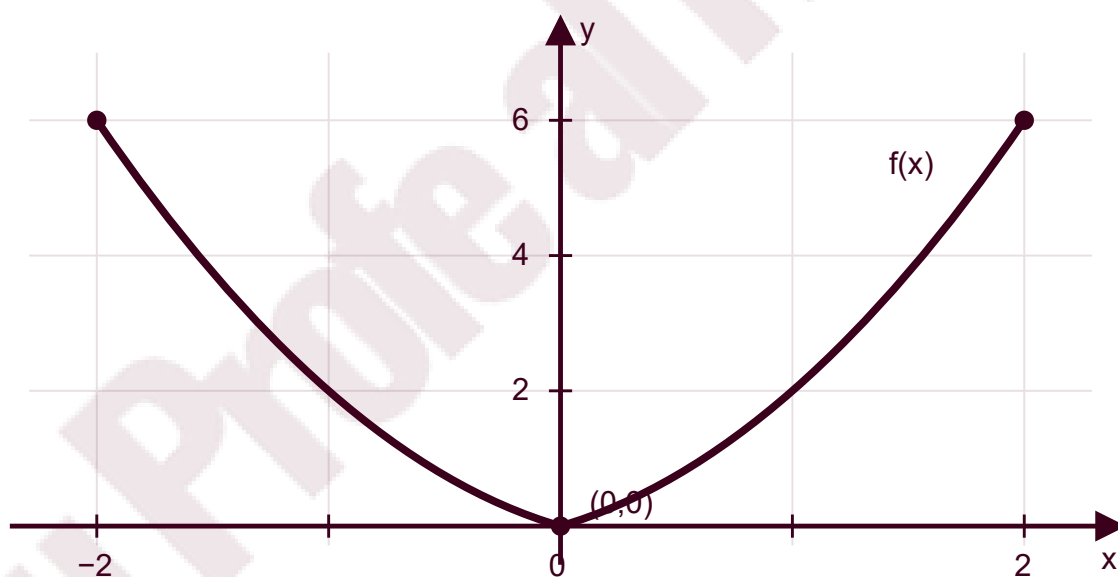
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) = +\infty.$$

No hay asíntota oblicua. Para que existiera, la pendiente $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$ tendría que ser finita; pero

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty.$$

d) Representación gráfica

La gráfica es una curva par con mínimo en el origen, pasa por $(-2, 6)$ y $(2, 6)$, y crece al alejarnos de 0. El dibujo propio muestra los dos tramos $x^2 - x$ para $x < 0$ y $x^2 + x$ para $x \geq 0$:



e) Integrales definidas

En el primer intervalo, $[-1, 0]$, se cumple $x \leq 0$, por lo que $|x| = -x$ y $f(x) = x^2 - x$. Integramos término a término y evaluamos entre los extremos indicados:

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

En el segundo intervalo, $[0, 2]$, se cumple $x \geq 0$, así que $|x| = x$ y $f(x) = x^2 + x$:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x^2 + x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - 0 = \boxed{\frac{14}{3}}.$$

Opción B

Problema B.1. Operaciones con matrices

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinantes pedidos

Usaremos las propiedades $\det(kM) = k^3 \det M$ para matrices 3×3 , $\det(MN) = \det M \det N$ y $\det(M^{-1}) = 1/\det M$. Primero desarrollamos por cofactores los determinantes de A y B :

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1, \det B = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Primera expresión: $A(2B)^2$. Como $\det(2B) = 2^3 \det B = -8$, resulta

$$\det(A(2B)^2) = \det A [\det(2B)]^2 = (-1)(-8)^2 = \boxed{-64}.$$

Segunda expresión: $A(2B)^2(3A)^{-1}$. Primero,

$$\det(3A) = 3^3 \det A = 27(-1) = -27.$$

Aplicando las mismas propiedades al producto y a la matriz inversa:

$$\det(A(2B)^2(3A)^{-1}) = \det A [\det(2B)]^2 \frac{1}{\det(3A)} = \frac{(-1)(-8)^2}{-27} = \boxed{\frac{64}{27}}.$$

b) Matrices A^{-1} y $((BA)^{-1}B)^{-1}$

Para invertir A , calculamos su determinante:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1.$$

La matriz de cofactores de A es

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{adj}(A) = C_A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usamos $A^{-1} = \text{adj}(A) / \det A$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para invertir la expresión compuesta usamos $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$. Como $\det A = \det B = -1$, ambas son invertibles y también lo es BA . Entonces:

$$\begin{aligned} ((BA)^{-1}B)^{-1} &= B^{-1}((BA)^{-1})^{-1} \\ &= B^{-1}(BA) \\ &= A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Ecuación matricial $AX + BX = 3I$

Como X aparece a la derecha en los dos productos, agrupamos:

$$AX + BX = (A + B)X = 3I.$$

Calculamos la suma:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \det C = 3(4) - 2(4) + 1(2) = 6 \neq 0.$$

Por tanto C es invertible y $X = C^{-1}(3I) = 3C^{-1}$. La inversa es

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -4 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema B.2. Planos con parámetros

$$\pi : x + y + z - 1 = 0, \sigma : ax + by + z = 0.$$

Los vectores normales son $\vec{n}_\pi = (1, 1, 1)$ y $\vec{n}_\sigma = (a, b, 1)$.

a) σ pasa por $(1, 2, 3)$ y es perpendicular a π

Para que $(1, 2, 3)$ pertenezca a σ , sustituimos sus coordenadas:

$$a(1) + b(2) + 3 = 0 \implies a + 2b = -3.$$

Dos planos son perpendiculares si sus normales tienen producto escalar cero:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma = (1, 1, 1) \cdot (a, b, 1) = a + b + 1 = 0.$$

Resolvemos el sistema de condiciones:

$$\begin{cases} a + 2b = -3 \\ a + b = -1 \end{cases} \implies \boxed{a = 1, b = -2.}$$

b) σ pasa por $(0, 1, 1)$ y la distancia de $(1, 0, 1)$ a σ es 1

La condición de pertenencia del punto es

$$a(0) + b(1) + 1 = 0 \implies b = -1.$$

La distancia de un punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $ax + by + z = 0$ es

$$d(Q, \sigma) = \frac{|ax_0 + by_0 + z_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Con $Q = (1, 0, 1)$ y $b = -1$, imponemos la distancia dada:

$$1 = \frac{|a + 1|}{\sqrt{a^2 + 2}} \implies (a + 1)^2 = a^2 + 2 \implies 2a + 1 = 2.$$

Así,

$$\boxed{a = \frac{1}{2}, b = -1.}$$

c) Intersección con dirección $(3, 2, -5)$

Un vector director de la intersección de dos planos se obtiene cruzando sus normales:

$$\vec{n}_\pi \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (1-b, a-1, b-a).$$

Para que la recta de intersección tenga como vector director $(3, 2, -5)$, este producto debe ser un múltiplo no nulo de dicho vector. Introducimos el factor $\lambda \neq 0$:

$$(1-b, a-1, b-a) = \lambda(3, 2, -5).$$

De las dos primeras componentes: $1-b = 3\lambda$, $a-1 = 2\lambda$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1 + 2\lambda, b = 1 - 3\lambda, \lambda \neq 0.}$$

La tercera componente queda satisfecha automáticamente: $b-a = -5\lambda$. Por tanto, tal como está escrito el enunciado, hay infinitas parejas (a, b) , no una sola: todos los valores de la forma anterior con $\lambda \neq 0$. El caso $\lambda = 0$ daría $\sigma: x + y + z = 0$, paralela y distinta de π , sin recta de intersección.

Para cada $\lambda \neq 0$, la recta cumple

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ (1 + 2\lambda)x + (1 - 3\lambda)y + z = 0. \end{cases}$$

Restando las ecuaciones:

$$\lambda(2x - 3y) = -1.$$

Si elegimos $x = 0$, la ecuación $\lambda(2x - 3y) = -1$ da $y = \frac{1}{3\lambda}$. La primera ecuación da entonces $z = 1 - \frac{1}{3\lambda}$. Por tanto, un punto de la recta para cada $\lambda \neq 0$ es

$$P_\lambda = \left(0, \frac{1}{3\lambda}, 1 - \frac{1}{3\lambda}\right).$$

La dirección es $(3, 2, -5)$, así que escribimos la recta exclusivamente en forma paramétrica:

$$r_\lambda: \begin{cases} x = 3t, \\ y = \frac{1}{3\lambda} + 2t, \\ z = 1 - \frac{1}{3\lambda} - 5t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, con $\lambda = 1$ se obtiene $a = 3$, $b = -2$ y la recta paramétrica concreta

$$r: x = 3t, y = \frac{1}{3} + 2t, z = \frac{2}{3} - 5t, t \in \mathbb{R}.$$

Problema B.3. Diferencia de potencial e intensidad

En este modelo, x representa la diferencia de potencial, medida en voltios (V), e $y = f(x)$ la intensidad, medida en amperios (A). Por tanto, el producto xy se mide en voltamperios (V·A). La función es

$$y = f(x) = -x^2 - x + 6, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

El dominio del problema es el intervalo cerrado $[0, 2]$, indicado en el enunciado.

a) Gráfica e intersecciones con los ejes

Para el eje Y , ponemos $x = 0$:

$$f(0) = 6,$$

así que la gráfica pasa por $(0, 6)$. Para el eje X , resolvemos:

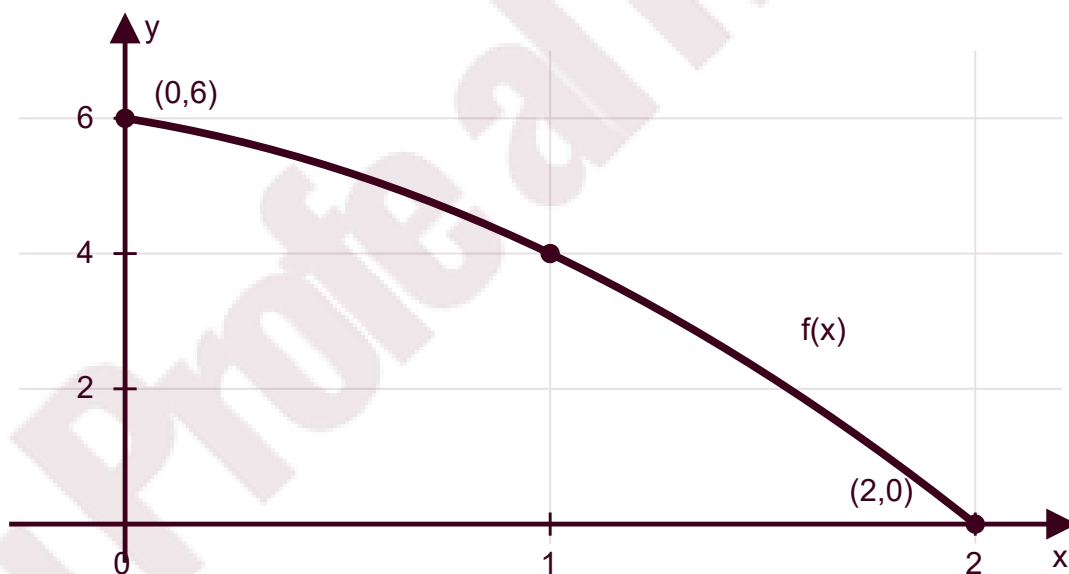
$$-x^2 - x + 6 = 0 \iff (x + 3)(x - 2) = 0.$$

Las raíces son $x = -3$ y $x = 2$, pero en el dominio $0 \leq x \leq 2$ solo está $x = 2$. La gráfica corta el eje X en $(2, 0)$.

Además,

$$f'(x) = -2x - 1 < 0 \text{ para todo } x \in [0, 2], \quad f''(x) = -2 < 0.$$

La curva baja continuamente desde $(0, 6)$ hasta $(2, 0)$ y es cóncava hacia abajo. El gráfico propio representa el tramo físico del enunciado:



Cuando $x = 0$, la intensidad es $y = 6$. La intensidad vale cero cuando $x = 2$.

b) Valor de x que maximiza el producto xy

El producto que queremos maximizar es

$$P(x) = xy = x(-x^2 - x + 6) = -x^3 - x^2 + 6x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Buscamos los puntos críticos igualando la derivada a cero:

$$P'(x) = -3x^2 - 2x + 6 = 0 \iff 3x^2 + 2x - 6 = 0.$$

Fórmula cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$

$$(a, b, c) = (3, 2, -6) \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3}.$$

Solo $x_0 = \frac{\sqrt{19}-1}{3}$ pertenece a $[0, 2]$. Comprobamos el signo de la derivada a ambos lados, usando $x = 1$ y $x = \frac{3}{2}$:

$$P'(1) = 1 > 0, P'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{4} < 0.$$

El único punto crítico del intervalo es $x_0 = \frac{\sqrt{19}-1}{3}$, con $1 < x_0 < \frac{3}{2}$. La tabla de signos queda:

Intervalo	Valor de prueba	Sustitución en P'	Signo	Comportamiento
$[0, x_0)$	1	$P'(1) = 1 > 0$	+	Creciente
$x = x_0$	x_0	$P'(x_0) = 0$	$+$ $\rightarrow$ $-$	Máximo
$(x_0, 2]$	$\frac{3}{2}$	$P'(\frac{3}{2}) = -\frac{15}{4} < 0$	-	Decreciente

El producto crece antes de x_0 y decrece después. En los extremos $P(0) = P(2) = 0$, así que el punto crítico interior es el máximo absoluto.

Para hallar su valor, usamos la ecuación crítica $3x_0^2 + 2x_0 - 6 = 0$, que da $f(x_0) = 2x_0^2 + x_0$. Entonces

$$P(x_0) = x_0^2(2x_0 + 1) = \frac{38\sqrt{19} - 56}{27}.$$

Por tanto,

$$x_0 = \frac{\sqrt{19} - 1}{3} \text{ V, } P_{\max} = \frac{38\sqrt{19} - 56}{27} \text{ V}\cdot\text{A.}$$

c) Área de la región del primer cuadrante

En $[0, 2]$, $f(x) \geq 0$. La región limitada por la curva y los ejes tiene área

$$\mathcal{A} = \int_0^2 (-x^2 - x + 6) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) - 0 = \frac{22}{3} \text{ V}\cdot\text{A.}$$