

Problema 1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un parámetro real.

- a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)
 b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A . (4 puntos)
 c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. (4 puntos)

Solución:

a) ¿ $k?$ / A sea invertible.

A es invertible si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3k + 2k - 2 + k^2 = k^2 - k - 2$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} k_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ k_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, A es invertible si $k \neq -1$ y $k \neq 2$.

b) Para $k = 0$, calcular A^{-1} .

Como $k = 0$ ($k \neq -1$ y $k \neq 2$) $\rightarrow$ existe la matriz inversa de A .

Cálculo de A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = (k^2 - k - 2)_{k=0} = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2 & -2/3 \\ 3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2/3 & 2 & -2/3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para $k = 0$, calcular las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$.

Como A es 3×3 , para que se puedan efectuar los dos productos la matriz D también es 3×3 .

$$D \text{ es una matriz diagonal} \rightarrow D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Calculemos AD ,

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix}.$$

Calculemos DA ,

$$DA = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix}.$$

Los dos productos deben ser iguales:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3z = 3x \\ y/3 = y/3 \\ z = y \\ 2z = 2z \\ -y = -z \\ -z = -z \end{cases} \text{ eliminando las identidades, } \begin{cases} 3z = 3x \\ z = y \\ -y = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = y \\ y = z \end{cases}$$

La 2ª y 3ª ecuaciones son la misma, queda $\begin{cases} z = x \\ z = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$, la solución es $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Solución: las matrices diagonales buscadas son $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Problema 2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2 X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)
- b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2 X = B$, encontrar el valor de α , β y γ dependiendo del parámetro real a . (5 puntos)

Solución:

a) Calculemos A^2 ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}$$

La ecuación $A^2 X = B$ tendrá solución única si existe la inversa de A^2 , por tanto si $|A^2| \neq 0$

$$\begin{aligned} |A^2| &= \begin{vmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{vmatrix} = (1+2a)4(2a+9) - 8 \cdot 4 \cdot 4a = 4[(1+2a)(2a+9) - 32a] = 4(4a^2 + 20a + 9 - 32a) = \\ &= 4(4a^2 - 12a + 9). \quad 4(4a^2 - 12a + 9) = 0; \quad 4a^2 - 12a + 9 = 0 \\ a &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Solución: la ecuación $A^2 X = B$ tiene solución única si $a \neq \frac{3}{2}$.

b)

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que } \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1+2a) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) \\ (9+a) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 11 \cdot (-1) \\ 4a \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (2a+9) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 3+6a-8 \\ 27+3a-8-11 \\ 12a-2a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 6a-5 \\ \beta = 3a+8 \\ \gamma = 10a-9 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} \alpha = 6a-5 \\ \beta = 3a+8 \\ \gamma = 10a-9 \end{cases}$$

Problema 3. Se dan las rectas $r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Se pide:

- Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s . (5 puntos)

Solución:

a) Comprobar que r y s se cortan

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_r(1, 2, 1) \\ \vec{v}_r(1, 1, 2) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_s(3, 3, -1) \\ \vec{v}_s(-2, -1, 2) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=3-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s estudiamos el rango de la matriz $\begin{bmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{bmatrix}$, es

decir: $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Rango de M , $\{M \text{ es } 3 \times 2, \text{ luego máximo rango de } M \text{ es } 2\}$

$$\left. \begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(M) = 2 \rightarrow r \text{ y } s \begin{cases} \text{se cortan} \\ \text{o} \\ \text{se cruzan} \end{cases}$$

Rango de M' , $\{M' \text{ es } 3 \times 3, \text{ luego máximo rango de } M \text{ es } 3\}$.

Por el cálculo del rango de M , sabemos que $\text{ran}(M') \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 4 - 4 + 2 + 4 = 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 2$$

Como $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2$, las rectas r y s se cortan.

El punto de corte entre r y s lo obtenemos resolviendo el sistema de las rectas a partir de sus ecuaciones paramétricas. Es decir,

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2\alpha \\ 2 + \lambda = 3 - \alpha \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 2 \\ \lambda + \alpha = 1 \\ 2\lambda - 2\alpha = -2 \end{cases} \quad \text{De este sistema, según el estudio de rangos anterior, sabemos que}$$

rango de la matriz de coeficientes = rango de la matriz ampliada = 2 = n° de incógnitas (λ y α).

Resolvemos usando 1ª y 2ª ecuación (corresponden al menor de orden 2 no nulo). El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \lambda + 2\alpha = 2 \\ \lambda + \alpha = 1 \end{cases} \rightarrow (-1)x2^a \quad \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 2 \\ -\lambda - \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $\lambda + 1 = 1$; $\lambda = 0$

Sustituimos los valores de las incógnitas en las ecuaciones de r y s para comprobar que se obtiene el mismo punto. Sólo sería necesario sustituir en una de las rectas.

$$\text{En } r: \begin{cases} x = 1 + 0 = 1 \\ y = 2 + 0 = 2 \\ z = 1 + 0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{En } s: \begin{cases} x = 3 - 2\alpha = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ y = 3 - \alpha = 3 - 1 = 2 \\ z = -1 + 2\alpha = -1 + 2 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Por tanto, **el punto de corte entre las rectas r y s es $P(1, 2, 1)$**

b) ¿recta t / $P \in t$ y $t \perp r$ y s ?

$$\text{Como } t \perp r \text{ y } s \rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_r \otimes \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$$

Por tanto $\vec{v}_t(4, -6, 1)$. Como $P(1, 2, 1) \in t$, la ecuación de la recta t será:

$$\text{Ecuación paramétrica } t: \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 2 - 6\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{ecuación continua } t: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}.$$

Tu Prof te al Rescate

Problema 4. Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

- Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)
- Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A , B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X , Y y Z , respectivamente. (3 puntos)
- Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Solución:

a) ¿ $d?$ / $d(\pi, (0,0,0)) = 1$.

$$d(\pi, O) = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{61}}$$

$$\text{y debe ser } \frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \rightarrow |d| = 61 \rightarrow \begin{cases} d = \sqrt{61} \\ d = -\sqrt{61} \end{cases}$$

Solución: $d = \sqrt{61}$ o $d = -\sqrt{61}$.

b) Calculemos los tres puntos A , B y C , intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados.

A , corte del plano π con eje X . La ecuación del eje X es: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 6x - d = 0 \rightarrow 6x = d \rightarrow x = \frac{d}{6} \rightarrow A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$$

B , corte del plano π con eje Y . La ecuación del eje Y es: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 4y - d = 0 \rightarrow 4y = d \rightarrow y = \frac{d}{4} \rightarrow B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$$

C , corte del plano π con eje Z . La ecuación del eje Z es: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow -3z - d = 0 \rightarrow 3z = -d \rightarrow z = \frac{-d}{3} \rightarrow C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$$

Solución: los puntos son $A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$ y $C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$.

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\text{Sea } \alpha = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$$

$$\vec{AB} = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right)$$

$$\vec{AC} = \left(0, 0, \frac{-d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, 0, \frac{-d}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{\left| \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right) \cdot \left(-\frac{d}{6}, 0, \frac{-d}{3}\right) \right|}{\sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 0^2} \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{-d}{3}\right)^2}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}}} = \\ &= \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\sqrt{\frac{52d^2}{576}} \sqrt{\frac{45d^2}{324}}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\sqrt{\frac{13d^2}{144}} \sqrt{\frac{5d^2}{36}}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\frac{\sqrt{13d^2}}{12} \frac{\sqrt{5d^2}}{6}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\frac{\sqrt{65d^4}}{72}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\frac{d^2 \sqrt{65}}{72}} = \\ &\left\{ \frac{d^2}{36} > 0 \rightarrow \left| \frac{d^2}{36} \right| = \frac{d^2}{36} \right\} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d^2 \sqrt{65}}{72}} = \frac{72 d^2}{36 d^2 \sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}} \end{aligned}$$

$$\text{Entonces, } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{65}} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{65}}\right) \cong 75'6367'' \text{ o } 1'3201 \text{ rds.}$$

Solución: el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ es $75'6367''$ o $1'3201$ rds.

Problema 5. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

- El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = \frac{-3}{4}$. (3 puntos)
- Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)
- Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Solución:

a) ¿a? / $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4}$.

$$h'(x) = a + 2x; \quad a + 2x = 0; \quad 2x = -a; \quad x = \frac{-a}{2}.$$

$$h''(x) = 2 \rightarrow h''\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 > 0 \rightarrow \text{en } x = \frac{-a}{2} \text{ hay un mínimo relativo.}$$

$$\text{Por tanto, } \frac{-a}{2} = \frac{-3}{4} \rightarrow -a = \frac{-6}{4} \rightarrow a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Solución: $a = \frac{3}{2}$.

b) Para $a = \frac{3}{2}$ dibujar las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.

$$y = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$$

Polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola.

Corte con ejes coordenados $(0, 0)$ y $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

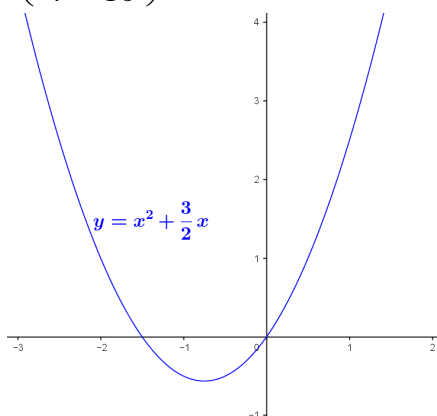
$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = 0; \quad x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Por lo estudiado en el apartado a), esta función tiene un mínimo

$$\text{relativo en } x = \frac{-3}{4} \rightarrow y = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{-3}{4} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = \frac{-9}{16}$$

$$\text{Mínimo relativo } \left(\frac{-3}{4}, \frac{-9}{16}\right)$$



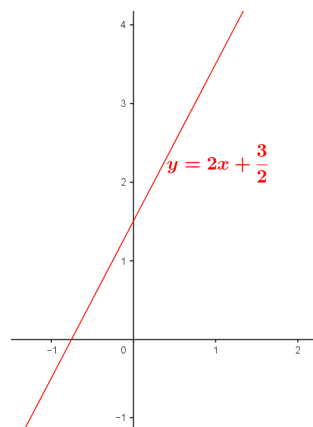
$$y = h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$$

Polinomio de 1º grado, gráficamente una recta.

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

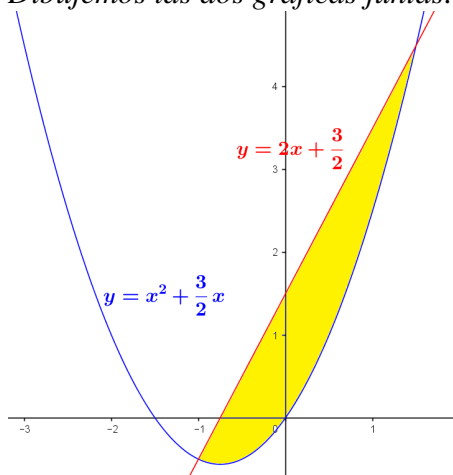
$$y = 0 \rightarrow 2x + \frac{3}{2} = 0; \quad 2x = \frac{-3}{2}; \quad x = \frac{-3}{4}$$

x	y
0	$\frac{3}{2}$
$\frac{-3}{4}$	0



c) ¿área del plano comprendida entre ambas curvas?

Dibujemos las dos gráficas juntas:



El área comprendida entre las dos curvas es la zona coloreada.

Obtengamos los puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2}; \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3; \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

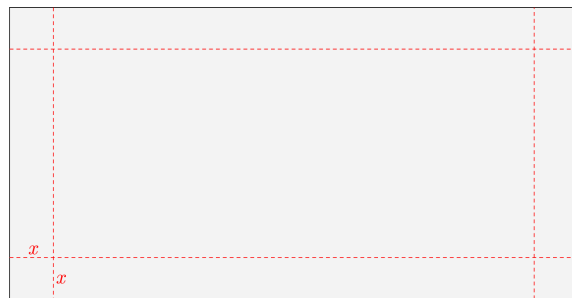
El área pedida la obtendremos calculando la siguiente integral definida,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(2x + \frac{3}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{\frac{3}{2}} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{\frac{3}{2}} = \\ &= \left[-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4} + \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right) \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = \\ &= \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{125}{48} \cong 2'6042 \end{aligned}$$

Solución: el área pedida mide $\frac{125}{48} \text{ u.a.} \cong 2'6042 \text{ u.a.}$

Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

- Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
- Dicho volumen. (2 puntos)



Solución:

Completando las dimensiones de la hoja:

	Las dimensiones, en cm, de la caja de cartón a construir son: largo $16 - 2x$, ancho $10 - 2x$ y alto x Por lo tanto el volumen de la caja será $V(x) = (16 - 2x)(10 - 2x)x$
--	--

Y para que haya caja deberá cumplirse: $\begin{cases} x > 0 \\ 16 - 2x > 0 \rightarrow 16 > 2x \rightarrow 8 > x \equiv x < 8, \text{ luego } 0 < x < 5 \\ 10 - 2x > 0 \rightarrow 10 > 2x \rightarrow 5 > x \equiv x < 5 \end{cases}$

$$V(x) = (160 - 32x - 20x + 4x^2)x = (4x^2 - 52x + 160)x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

Debemos obtener el máximo de la función $V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ siendo $0 < x < 5$

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$12x^2 - 104x + 160 = 0; \quad x = \frac{-(-104) \pm \sqrt{(-104)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 160}}{2 \cdot 12} = \frac{104 \pm 56}{24} = \begin{cases} x_1 = \frac{104 + 56}{24} = \frac{20}{3} > 5 \\ x_2 = \frac{104 - 56}{24} = 2 \in (0, 5) \end{cases}$$

Obtengamos el signo de $V'(x)$ a la izquierda y derecha de $x = 2$.

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$x = 1.5 \rightarrow V'(1.5) = 12(1.5)^2 - 104(1.5) + 160 = 31 > 0 \text{ creciente}$$

$$x = 2.5 \rightarrow V'(2.5) = 12(2.5)^2 - 104(2.5) + 160 = -25 < 0 \text{ decreciente}$$

Por tanto, como $V(x)$ es creciente a la izquierda de 2 y decreciente a su derecha el máximo relativo es absoluto.

$$\text{Para } x = 2, \text{ largo } 16 - 2 \cdot 2 = 12, \text{ ancho } 10 - 2 \cdot 2 = 6; \quad V(2) = 4 \cdot 2^3 - 52 \cdot 2^2 + 160 \cdot 2 = 144$$

Solución:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible son: 12 cm de largo, 6 cm de ancho y 2 cm de altura.

b) El volumen máximo es de 144 cm^3 .

Problema 7. Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10'25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)
- Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)
- Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

M_1 = lata fabricada por la 1ª máquina

M_2 = lata fabricada por la 2ª máquina

M_3 = lata fabricada por la 3ª máquina

B = lata buena

$\bar{B}$ = lata defectuosa

De los datos del problema:

La máquina M_1 fabrica el 30% de las latas $\rightarrow P(M_1) = 0'30$.

La máquina M_2 fabrica el 25% de las latas $\rightarrow P(M_2) = 0'25$.

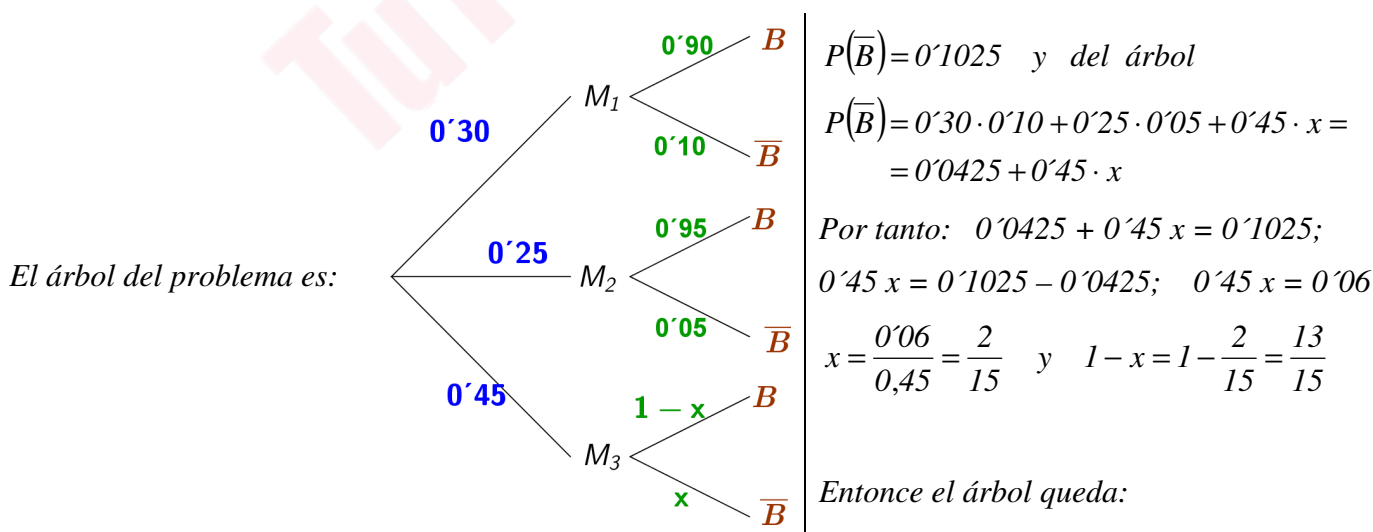
Y el resto ($100 - 30 - 25 = 45$) lo fabrica la máquina M_3 $\rightarrow P(M_3) = 0'45$.

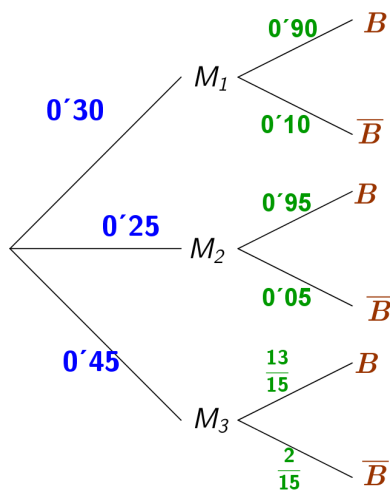
En M_1 el 10% de las latas fabricadas son defectuosas $\rightarrow P(\bar{B}) = 0'10$ y $P(B) = 1 - 0'10 = 0'90$

En M_2 el 5% de las latas fabricadas son defectuosas $\rightarrow P(\bar{B}) = 0'05$ y $P(B) = 1 - 0'05 = 0'95$

En M_3 $\rightarrow P(\bar{B}) = x$ y $P(B) = 1 - x$

El 10'25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas $\rightarrow P(\bar{B}) = 0'1025$





a) Probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa.

La probabilidad pedida es $P\left(\frac{\bar{B}}{M_3}\right)$

$$P\left(\frac{\bar{B}}{M_3}\right) = \frac{P(\bar{B} \cap M_3)}{P(M_3)} = \frac{0.45 \cdot \frac{2}{15}}{0.45} = \frac{2}{15} \cong 0.1333.$$

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?

La probabilidad pedida es $P\left(\frac{M_1}{B}\right)$

$$P\left(\frac{M_1}{B}\right) = \frac{P(M_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.30 \cdot 0.90}{1 - P(\bar{B})} = \frac{0.27}{1 - 0.1025} = \frac{108}{359} \cong 0.3008.$$

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

La probabilidad pedida es $P\left(\frac{M_1}{B}\right) + P\left(\frac{M_3}{B}\right)$

$$P\left(\frac{M_1}{B}\right) + P\left(\frac{M_3}{B}\right) = \frac{P(M_1 \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} + \frac{P(M_3 \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.30 \cdot 0.10}{0.1025} + \frac{0.45 \cdot \frac{2}{15}}{0.1025} = \frac{36}{41} \cong 0.8780.$$

Problema 8. Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)
- Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)
- Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

E = mensaje con emoticonos.

$\bar{E}$ = mensaje sin emoticonos

Como “el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp añade emoticono” $\rightarrow$

$$P(E) = 0.60 \rightarrow P(\bar{E}) = 1 - 0.60 = 0.40$$

Se mandan 10 mensajes, usando la variable X = número de mensajes con emoticonos en 10 mensajes, X es una variable binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.6$.

La tabla que tenemos de la binomial no da los resultados para esta variable (es para $p \leq 0.5$). Por lo tanto utilizaremos la siguiente variable: Y = número de mensajes sin emoticonos en 10 mensajes $\rightarrow Y = B(10, 0.4)$ y la tabla nos da los resultados para Y .

La relación entre estas dos variables es:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

- a) Probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.

“ningún mensaje de los diez tenga emoticonos” $\equiv X = 0 \equiv Y = 10$

$$P(X = 0) = P(Y = 10) = P(Y \leq 10) - P(Y \leq 9) = 1 - 0.9999 = 0.0001$$

La probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos es 0.0001.

- b) Probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.

$$\frac{2}{5} \text{ de } 10 = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$$

“que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos” $\equiv X = 4 \equiv Y = 6$

$$P(X = 4) = P(Y = 6) = P(Y \leq 6) - P(Y \leq 5) = 0.9452 - 0.8338 = 0.1114$$

La probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos es 0.1114.

- c) Probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos.

“que ocho o más mensajes tengan emoticonos” $\equiv X \geq 8 \equiv Y \leq 2$

$$P(X \geq 8) = P(Y \leq 2) = 0.1673$$

La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos es 0.1673.