

PAU Madrid - Matemáticas II

Modelo orientativo 2019-2020

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se desarrollan todas para repasar el temario completo.

A.1. Composición del aire del invernadero

a) Litros de cada gas

El volumen total es de 2000 litros. Para obtener la cantidad de cada gas, multiplicamos el volumen total por su porcentaje:

$$V_{N_2} = 0,78 \cdot 2000 = 1560, \quad V_{O_2} = 0,21 \cdot 2000 = 420, \quad V_{Ar} = 0,01 \cdot 2000 = 20.$$

Conclusión. Se necesitan 1560 litros de nitrógeno, 420 de oxígeno y 20 de argón.

b) Cantidad de cada mezcla

Sean a, b, c los litros de las mezclas A, B y C. Como B es la única mezcla con argón, y contiene un 10 %, la cantidad necesaria de B se obtiene directamente de los 20 litros de argón:

$$0,10b = 20 \implies b = 200.$$

El volumen total debe ser 2000 litros, por lo que

$$a + c = 2000 - 200 = 1800.$$

Usamos ahora el oxígeno, cuya proporción es del 20 % en A, 20 % en B y 40 % en C:

$$0,20a + 0,20(200) + 0,40c = 420 \implies a + 2c = 1900.$$

Restando $a + c = 1800$ resulta $c = 100$ y, por tanto, $a = 1700$. Comprobamos el nitrógeno para verificar que se obtiene la composición solicitada:

$$0,80(1700) + 0,70(200) + 0,60(100) = 1360 + 140 + 60 = 1560.$$

Conclusión. Hay que mezclar 1700 litros de A, 200 litros de B y 100 litros de C.

A.2. Función exponencial $f(x) = e^{3x-2}$

a) Tangente con pendiente $3/e$

La pendiente de la tangente en un punto de abscisa x es $f'(x)$. Derivando con la regla de la cadena,

$$f'(x) = 3e^{3x-2}.$$

Buscamos dónde esta pendiente vale $3/e$:

$$3e^{3x-2} = \frac{3}{e} \implies e^{3x-2} = e^{-1} \implies x = \frac{1}{3}.$$

El punto de la curva es $f(1/3) = e^{-1} = 1/e$. La ecuación de la recta tangente de pendiente m por (x_0, y_0) es $y - y_0 = m(x - x_0)$; así,

$$y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e} \left(x - \frac{1}{3} \right) \implies y = \frac{3x}{e}.$$

Conclusión. La tangente se encuentra en $(1/3, 1/e)$ y su ecuación es $y = 3x/e$.

b) Límite

Al sustituir $x = 2/3$ se obtiene la indeterminación $0/0$. Aplicamos L'Hôpital, derivando numerador y denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{-3e^{3x-2}}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusión. El límite es $-\frac{1}{2}$.

c) Área acotada

La curva corta a la recta $y = 1$ cuando $e^{3x-2} = 1$, es decir, cuando $x = 2/3$. En $0 \leq x \leq 2/3$ la curva queda por debajo de $y = 1$, por lo que el área se calcula integrando la diferencia entre ambas funciones:

$$\mathcal{A} = \int_0^{2/3} (1 - e^{3x-2}) dx.$$

Una primitiva es $x - \frac{1}{3}e^{3x-2}$. Por la regla de Barrow,

$$\mathcal{A} = \left[x - \frac{1}{3}e^{3x-2} \right]_0^{2/3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3e^2} = \frac{e^2 + 1}{3e^2}.$$

Conclusión. El área es $\frac{e^2 + 1}{3e^2}$ unidades cuadradas.

A.3. Rectas en el espacio

Tomamos como parámetros independientes t y s para escribir las rectas en forma paramétrica:

$$r_1 : \begin{cases} x = t - 1, \\ y = 2 - 3t, \\ z = t, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 4 + 5s, \\ y = 4s - 3, \\ z = s. \end{cases}$$

Sus puntos de referencia y vectores directores son

$$P_1 = (-1, 2, 0), \quad \vec{d}_1 = (1, -3, 1), \quad P_2 = (4, -3, 0), \quad \vec{d}_2 = (5, 4, 1).$$

a) Posición relativa y distancia

Los vectores directores no son proporcionales. Para comprobar si las rectas son coplanarias calculamos el producto mixto con el vector que une P_1 y P_2 :

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (4 - (-1), -3 - 2, 0 - 0) = (5, -5, 0),$$

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = (-7, 4, 19), \quad (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = (-7, 4, 19) \cdot (5, -5, 0) = -55 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo indica que las dos direcciones y el vector entre puntos no están en un mismo plano. Las rectas son alabeadas.

Para dos rectas alabeadas, la distancia es el valor absoluto de ese producto mixto dividido por el área de la base, que es $\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\|$:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|(\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\|} = \frac{55}{\sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 19^2}} = \frac{55}{\sqrt{426}}.$$

Conclusión. Las rectas son alabeadas y su distancia es $\frac{55}{\sqrt{426}}$.

b) Intersección de r_2 con el plano

El plano contiene el origen y r_1 , por lo que contiene los vectores $P_1 = (-1, 2, 0)$ y $\vec{d}_1 = (1, -3, 1)$. Un vector normal es su producto vectorial:

$$P_1 \times \vec{d}_1 = (-2, -1, -1),$$

que podemos sustituir por $(2, 1, 1)$. El plano por el origen queda

$$2x + y + z = 0.$$

Sustituimos la forma paramétrica de r_2 en la ecuación del plano:

$$2(4 + 5s) + (4s - 3) + s = 0 \implies 5 + 15s = 0 \implies s = -\frac{1}{3}.$$

El punto de corte es

$$\left(4 + 5\left(-\frac{1}{3}\right), 4\left(-\frac{1}{3}\right) - 3, -\frac{1}{3} \right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

Conclusión. El punto de intersección es $(7/3, -13/3, -1/3)$.

A.4. Probabilidades de dos sucesos

Los datos son $P(A \cup B) = 0,55$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,90$ y $P(B | A) = 0,25$.

a) Probabilidades pedidas

Por las leyes de De Morgan, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Así,

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,90 = 0,10.$$

La probabilidad condicionada se define como $P(B | A) = P(A \cap B)/P(A)$; despejamos $P(A)$:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B | A)} = \frac{0,10}{0,25} = 0,40.$$

Usando $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, obtenemos

$$P(B) = 0,55 - 0,40 + 0,10 = 0,25.$$

Para la última condicionada,

$$P(\overline{B} | \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{0,45}{0,60} = 0,75.$$

Conclusión. $P(A \cap B) = 0,10$, $P(A) = 0,40$, $P(B) = 0,25$ y $P(\overline{B} | \overline{A}) = 0,75$.

b) Independencia

Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. En este caso,

$$P(A)P(B) = 0,40 \cdot 0,25 = 0,10 = P(A \cap B).$$

Conclusión. Los sucesos A y B son independientes.

B.1. Rango y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes tiene tres filas y dos columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Rango de A según t

El rango es como máximo 2. Estudiamos el menor de las dos primeras filas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \end{vmatrix} = 10 + 3t - 5(2+t) = -2t.$$

Si $t \neq 0$, este menor no se anula y $rg(A) = 2$. Si $t = 0$, la segunda columna es el doble de la primera:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

por lo que el rango es 1. **Conclusión.** $rg(A) = 2$ para $t \neq 0$ y $rg(A) = 1$ para $t = 0$.

b) Valores de t que dan una solución única

El sistema tiene dos incógnitas. Para que sea compatible determinado debe cumplirse $rg(A) = rg(A^*) = 2$, de modo que $t \neq 0$. Usamos las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x + (2+t)y = 3, \\ 5x + (10+3t)y = 9. \end{cases}$$

Restamos cinco veces la primera ecuación de la segunda:

$$-2ty = -6 \implies y = \frac{3}{t}.$$

Al sustituir en la primera,

$$x = 3 - (2+t)\frac{3}{t} = -\frac{6}{t}.$$

La tercera ecuación exige $-x - 2y = 3t + 3$. Con las expresiones obtenidas, el miembro izquierdo vale $6/t - 6/t = 0$, así que la compatibilidad requiere $3t + 3 = 0$, es decir, $t = -1$. Para ese valor, $x = 6$ e $y = -3$. La matriz de coeficientes tiene rango 2 y se satisfacen las tres ecuaciones, luego se trata de un sistema SCD. **Conclusión.** El único valor que da una solución única es $t = -1$, y la solución es $(x, y) = (6, -3)$.

B.2. Función racional $f(x) = \frac{3}{x+1}$

El dominio excluye los valores que anulan el denominador: $x \neq -1$.

a) Área del triángulo con la tangente en $x = 2$

Derivamos para obtener la pendiente de la tangente:

$$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2}, \quad f(2) = 1, \quad f'(2) = -\frac{1}{3}.$$

La recta tangente en $(2, 1)$ es

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \implies y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}.$$

Sus intersecciones con los ejes son $(5, 0)$ y $(0, 5/3)$. El área del triángulo con vértices en esos dos puntos y el origen es

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6}.$$

Conclusión. El área del triángulo es $\frac{25}{6}$ unidades cuadradas.

b) Asíntotas y monotonía

La función es racional y su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En el punto excluido,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty,$$

así que $x = -1$ es una asíntota vertical. Cuando $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x+1} = 0,$$

por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos. No hay asíntota oblicua, pues la función tiende a un valor finito en el infinito.

El signo de la derivada permite determinar dónde crece o decrece:

$$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} < 0$$

en todo el dominio. Por tanto, f decrece en cada intervalo de su dominio: $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$. **Conclusión.** Las asíntotas son $x = -1$ e $y = 0$; la función es decreciente en ambos intervalos de su dominio.

c) Integral

Descomponemos el integrando para usar primitivas conocidas:

$$\int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 \frac{3x}{x+1} dx = 3 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx.$$

Así,

$$\int_0^2 x f(x) dx = 3 [x - \ln|x+1|]_0^2 = 6 - 3 \ln 3.$$

Conclusión. La integral definida vale $6 - 3 \ln 3$.

B.3. Triángulo y geometría en el espacio

a) Área del triángulo OPQ

Calculamos el vector director de la recta AB restando coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1, -1 - 1, 4 - (-2)) = (2, -2, 6).$$

El punto medio es

$$P = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+(-1)}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) = (2, 0, 1).$$

La recta que pasa por A y B tiene forma paramétrica

$$\ell: \begin{cases} x = 1 + 2s, \\ y = 1 - 2s, \\ z = -2 + 6s. \end{cases}$$

Para hallar Q , imponemos $z = 7$: $-2 + 6s = 7$, luego $s = 3/2$ y

$$Q = (4, -2, 7).$$

El área del triángulo con vértices O, P, Q es la mitad del área del paralelogramo generado por OP y OQ :

$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\|, \quad \overrightarrow{OP} = (2, 0, 1), \quad \overrightarrow{OQ} = (4, -2, 7).$$

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = (2, -10, -4), \quad A = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-10)^2 + (-4)^2} = \frac{\sqrt{120}}{2} = \sqrt{30}.$$

Conclusión. El área del triángulo OPQ es $\sqrt{30}$.

b) Plano por A perpendicular a r

Un plano perpendicular a una recta tiene como vector normal el vector director de esa recta. Como r tiene dirección $(3, 5, 0)$, la ecuación del plano por $A = (1, 1, -2)$ es

$$3(x - 1) + 5(y - 1) + 0(z + 2) = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $3x + 5y - 8 = 0$.

c) Coseno del ángulo entre las rectas

Usamos como directores $\vec{d} = (3, 5, 0)$ para r y $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 6)$ para la recta AB . El coseno del ángulo entre dos rectas se obtiene con el valor absoluto del producto escalar, pues el sentido elegido para un vector director puede invertirse:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{d}\| \|\vec{u}\|}.$$

$$\vec{d} \cdot \vec{u} = 6 - 10 = -4, \quad \|\vec{d}\| = \sqrt{34}, \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

$$\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{34} 2\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{374}}.$$

Conclusión. El coseno del ángulo entre las rectas es $\frac{2}{\sqrt{374}}$.

B.4. Distribución normal de temperaturas

Sea T la temperatura máxima diaria. Tiene distribución normal de media $\mu = 30$ y varianza 25, luego su desviación típica es $\sigma = 5$:

$$T \sim N(30, 5).$$

Tipificamos mediante $Z = (T - 30)/5$, que sigue una normal estándar $N(0, 1)$.

a) Temperatura entre 28°C y 32°C

Los límites tipificados son

$$z_1 = \frac{28 - 30}{5} = -0,4, \quad z_2 = \frac{32 - 30}{5} = 0,4.$$

Por simetría de la normal,

$$P(28 < T < 32) = P(-0,4 < Z < 0,4) = \Phi(0,4) - \Phi(-0,4) = 2\Phi(0,4) - 1.$$

De la tabla, $\Phi(0,4) = 0,6554$, así que la probabilidad es 0,3108. **Conclusión.** La probabilidad es 0,3108, aproximadamente un 31,08 %.

b) Número esperado de días por encima de 36°C

Primero calculamos la probabilidad diaria de superar esa temperatura:

$$P(T > 36) = P\left(Z > \frac{36 - 30}{5}\right) = P(Z > 1,2) = 1 - \Phi(1,2).$$

Como $\Phi(1,2) = 0,8849$, se obtiene $P(T > 36) = 0,1151$. En 30 días, el número esperado es el número de días multiplicado por la probabilidad de excedencia diaria:

$$E(N) = 30 \cdot 0,1151 = 3,453.$$

Conclusión. Se esperan aproximadamente 3,45 días con temperatura superior a 36°C.

c) Temperatura superada el 50 % de los días

Si una temperatura se supera la mitad de los días, la probabilidad de superarla es 0,5. En una distribución normal, simétrica respecto de su media, la mediana coincide con la media:

$$P(T > t) = 0,5 \implies t = \mu = 30^\circ\text{C}.$$

Conclusión. La temperatura máxima del día 10 fue 30°C.