

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Inversión en dos productos financieros

Sean x e y los euros invertidos en los productos A y B. Como ambos ofrecen una rentabilidad positiva, para maximizar el rendimiento invertimos los 9000 euros disponibles:

$$x + y = 9000, \quad x > 5000, \quad x \geq 2y, \quad x, y \geq 0.$$

La ganancia obtenida es

$$R = 0,027x + 0,063y.$$

Despejamos $x = 9000 - y$ y expresamos la ganancia en función de y :

$$R = 0,027(9000 - y) + 0,063y = 243 + 0,036y.$$

Como el coeficiente de y es positivo, la ganancia aumenta al invertir más en B. La condición $x \geq 2y$ limita esa inversión:

$$9000 - y \geq 2y \implies y \leq 3000.$$

La otra condición exige $y < 4000$, así que el máximo permitido por ambas se alcanza con $y = 3000$ y $x = 6000$. La inversión en A supera los 5000 euros, como pide el enunciado. La ganancia correspondiente es

$$R = 0,027(6000) + 0,063(3000) = 162 + 189 = 351 \text{ €}.$$

Sobre los 9000 euros invertidos, esto equivale a una rentabilidad del $351/9000 = 0,039 = 3,9\%$.

$x = 6000 \text{ € en A, } y = 3000 \text{ € en B; } R_{\max} = 351 \text{ €} = 3,9\%.$

Problema 2 · Estudio de una función racional

La función es $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. El denominador no puede anularse, así que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

El numerador se anula en $x = 0$, que también da el corte con el eje Y : $(0, 0)$.

En $x = 2$ el numerador tiende a 4 y el denominador a cero. Los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty,$$

por lo que $x = 2$ es una asíntota vertical. Para estudiar el comportamiento en el infinito, dividimos:

$$f(x) = -x - 2 + \frac{4}{2-x}.$$

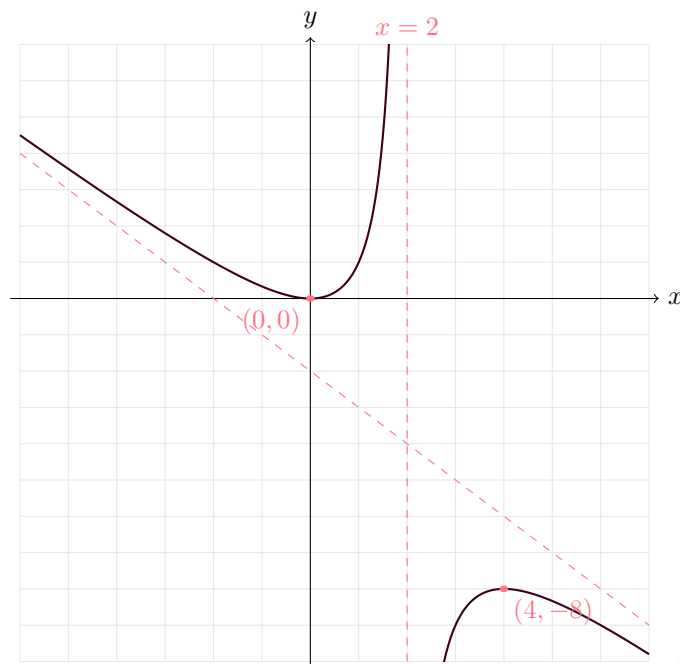
El último término tiende a cero en ambos extremos; por ello hay una asíntota oblicua $y = -x - 2$ y no horizontal. Derivamos para localizar los intervalos de variación:

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) + x^2}{(2-x)^2} = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}.$$

Los puntos que separan intervalos son $x = 0$, $x = 4$ (ceros de la derivada) y $x = 2$ (fuera del dominio). El denominador es positivo; probando $x = -1, 1, 3, 5$ el signo de f' es, respectivamente, $-, +, +, -$. Así, f decrece en $(-\infty, 0)$, crece en $(0, 2)$ y $(2, 4)$, y decrece en $(4, +\infty)$. En $x = 0$ pasa de decrecer a crecer, y en $x = 4$ de crecer a decrecer:

$$f(0) = 0 \quad (\text{mínimo local}), \quad f(4) = -8 \quad (\text{máximo local}).$$

La gráfica representa las dos ramas, la asíntota vertical, la oblicua y los extremos.



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}; \quad (0, 0); \quad x = 2, \quad y = -x - 2; \quad \min_{\text{loc}} f = (0, 0), \quad \max_{\text{loc}} f = (4, -8).$$

Problema 3 · Hogares con Smart TV y televisión de pago

Sean S el suceso «el hogar tiene Smart TV» y P el suceso «ha contratado televisión de pago». Los datos son $P(S) = \frac{2}{3}$, $P(P | S) = \frac{3}{8}$ y $P(P) = 0,30 = \frac{3}{10}$. En particular,

$$P(S \cap P) = P(S)P(P | S) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}.$$

a) Los hogares con televisión de pago se dividen en los que tienen Smart TV y los que no. Restamos la primera parte del total:

$$P(\bar{S} \cap P) = P(P) - P(S \cap P) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

b) Para calcular la probabilidad de tener Smart TV sabiendo que se ha contratado televisión de pago, usamos la probabilidad condicionada:

$$P(S | P) = \frac{P(S \cap P)}{P(P)} = \frac{1/4}{3/10} = \frac{5}{6}.$$

c) Los hogares sin Smart TV y sin televisión de pago tienen probabilidad

$$P(\bar{S} \cap \bar{P}) = P(\bar{S}) - P(\bar{S} \cap P) = \frac{1}{3} - \frac{1}{20} = \frac{17}{60}.$$

Como $P(\bar{P}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$, resulta

$$P(\bar{S} | \bar{P}) = \frac{17/60}{7/10} = \frac{17}{42}.$$

$$\text{a) } \frac{1}{20}; \quad \text{b) } \frac{5}{6}; \quad \text{c) } \frac{17}{42}.$$

Opción B

Problema 1 · Operaciones matriciales

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Usamos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Primero,

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = 4.$$

La fórmula de la inversa de una matriz 2×2 da

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Calculamos cada producto antes de restar:

$$AB^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^t B = AB = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$AB^t - A^t B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

c) Aislamos el término con X y multiplicamos por $(B^t)^{-1}$:

$$B^t X = A^t - A^t B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad (B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = (B^t)^{-1}(A^t - A^t B) = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{17}{2} \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}; \quad AB^t - A^t B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{17}{2} \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Beneficios durante los primeros seis años

La función, en decenas de miles de euros, es

$$f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t = t(t-3)(t-5), \quad 0 \leq t \leq 6.$$

La factorización permite determinar directamente el signo: hay beneficios en $(0, 3) \cup (5, 6]$ y pérdidas en $(3, 5)$. En $t = 0, 3, 5$ el beneficio es nulo.

Para hallar los extremos interiores calculamos

$$f'(t) = 3t^2 - 16t + 15 = 0 \implies t_1 = \frac{8 - \sqrt{19}}{3}, \quad t_2 = \frac{8 + \sqrt{19}}{3}.$$

La derivada es positiva antes de t_1 , negativa entre ambos puntos y positiva después de t_2 . Así, t_1 es un máximo local y t_2 un mínimo local. Sustituyendo las raíces en f se obtiene $f(t_1) \approx 8,21$ y

$$f(t_2) = \frac{2(28 - 19\sqrt{19})}{27} \approx -4,0607 \text{ decenas de miles de euros.}$$

Comparamos con los extremos del intervalo: $f(0) = 0$ y $f(6) = 18$. El máximo absoluto en los primeros seis años se alcanza en $t = 6$ y es 180 000 €. El mínimo está en t_2 , así que la mayor pérdida es $\frac{2(19\sqrt{19}-28)}{27}$. 10 000 € $\approx$ 40 607 €.

Para $t > 6$, los factores t , $t - 3$ y $t - 5$ son positivos. Por ello, la empresa no vuelve a alternar periodos de beneficios y pérdidas: desde ese momento el modelo da beneficios.

Problema 3 · Salarios superiores a 5000 euros

Sean M el suceso «hombre», F el suceso «mujer» y S el suceso «salario superior a 5000 €». Los datos dan $P(F) = 0,30$, $P(M) = 0,70$, $P(S | M) = 0,05$ y $P(S | F) = 0,02$. a) Los casos hombre y mujer son incompatibles y cubren a todos los trabajadores. Sumamos sus contribuciones:

$$P(S) = P(M)P(S | M) + P(F)P(S | F) = 0,70(0,05) + 0,30(0,02) = 0,041.$$

b) Aplicamos Bayes para invertir la condición:

$$P(F | S) = \frac{P(F)P(S | F)}{P(S)} = \frac{0,30(0,02)}{0,041} = \frac{6}{41}.$$

c) La proporción de todos los trabajadores que son hombres y superan ese salario es

$$P(M \cap S) = P(M)P(S | M) = 0,70(0,05) = 0,035 = 3,5\%.$$

$$P(S) = 4,1\%; \quad P(F | S) = \frac{6}{41}; \quad P(M \cap S) = 3,5\%.$$