

Julio de 2015 · Convocatoria extraordinaria

El examen permite elegir la opción A o la opción B y resolver sus tres problemas. Aquí se desarrollan ambas opciones. En cada apartado explicamos qué datos usamos, qué relación matemática aplicamos y cómo obtenemos la respuesta.

Opción A

A.1. Discusión del sistema con el parámetro α

El sistema del enunciado es

$$\begin{cases} x + 3y + z = \alpha, \\ x + y - \alpha z = 1, \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha + 3. \end{cases}$$

Para aplicar Rouché–Frobenius escribimos la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A^* :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 & 2\alpha + 3 \end{array} \right).$$

Como hay tres incógnitas, el rango de A no puede superar 3. Primero calculamos su determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= (\alpha^2 - 1) - 3(-1 + 2\alpha) + (\alpha - 2) \\ &= \alpha^2 - 5\alpha \\ &= \alpha(\alpha - 5). \end{aligned}$$

Por tanto, si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 5$, el determinante no es cero. En ese caso $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene solo tres filas, así que su rango tampoco puede ser mayor que 3; como contiene a A , también tiene rango 3. Por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado. Los casos que requieren un estudio aparte son $\alpha = 0$ y $\alpha = 5$.

a) Solución para $\alpha = -1$

Al sustituir $\alpha = -1$, resulta

$$\begin{cases} x + 3y + z = -1, \\ x + y + z = 1, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases}$$

Este caso no anula el determinante:

$$\det A|_{\alpha=-1} = (-1)(-1 - 5) = 6 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, igual al número de incógnitas: existe una única solución.

Restamos la segunda ecuación de la primera:

$$(x + 3y + z) - (x + y + z) = -1 - 1 \implies 2y = -2 \implies y = -1.$$

Con $y = -1$, la segunda y la tercera ecuación quedan

$$x + z = 2, \quad 2x - z = 0.$$

De la segunda igualdad, $z = 2x$. Al sustituir en $x + z = 2$:

$$x + 2x = 2 \implies x = \frac{2}{3}, \quad z = 2x = \frac{4}{3}.$$

Conclusión: para $\alpha = -1$, la solución única es

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, -1, \frac{4}{3} \right).$$

b) Todas las soluciones para $\alpha = 0$

Al sustituir $\alpha = 0$, el sistema es

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0, \\ x + y = 1, \\ 2x - z = 3. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la ampliada quedan

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_0^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

El determinante de A_0 es cero, pues $\alpha = 0$ anula $\det A = \alpha(\alpha - 5)$. Para demostrar que el rango es 2, usamos el menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A_0) \geq 2$; como su determinante de orden 3 es cero, $\text{rg}(A_0) = 2$.

El mismo menor no nulo aparece en A_0^* , por lo que $\text{rg}(A_0^*) \geq 2$. En la matriz ampliada se cumple

$$\text{fila 3} = -\text{fila 1} + 3 \text{ fila 2},$$

porque

$$-(1, 3, 1 | 0) + 3(1, 1, 0 | 1) = (2, 0, -1 | 3).$$

Por tanto, la tercera fila no aumenta el rango, $\text{rg}(A_0^*) \leq 2$, y queda comprobado por el menor y la dependencia de filas que $\text{rg}(A_0^*) = 2$. Rouché–Frobenius da

$$\text{rg}(A_0) = \text{rg}(A_0^*) = 2 < 3.$$

El sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones y un parámetro libre. Tomamos $y = t$, con $t \in \mathbb{R}$. De la segunda ecuación,

$$x + t = 1 \implies x = 1 - t.$$

De la tercera,

$$2(1 - t) - z = 3 \implies z = -1 - 2t.$$

La primera ecuación también se cumple:

$$(1 - t) + 3t + (-1 - 2t) = 0.$$

Conclusión: todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (1 - t, t, -1 - 2t), t \in \mathbb{R}.$$

c) Valor de α para que el sistema sea incompatible

El sistema solo puede dejar de ser compatible determinado cuando $\det A = 0$:

$$\alpha(\alpha - 5) = 0 \implies \alpha = 0 \text{ o } \alpha = 5.$$

El caso $\alpha = 0$ ya se ha estudiado: es compatible indeterminado. Estudiamos $\alpha = 5$. La matriz de coeficientes tiene determinante cero, pero el menor de orden 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

demuestra que $\text{rg}(A) = 2$.

Para la matriz ampliada, tomamos las columnas correspondientes a x , y y los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 8 - 33 + 15 = -10 \neq 0.$$

Este menor de orden 3 demuestra que $\text{rg}(A^*) = 3$. Comparamos los rangos:

$$\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A^*),$$

Como los rangos son distintos, por Rouché–Frobenius el sistema es incompatible.

Conclusión: el único valor que hace incompatible el sistema es

$$\boxed{\alpha = 5}.$$

A.2. Rectas, plano y distancia

El enunciado da las rectas

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}, \quad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

y el punto $P = (0, 3, -2)$.

Usaremos exclusivamente ecuaciones paramétricas. En r , igualamos las tres fracciones a un parámetro t :

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, un punto de r es $R = (-1, 1, 0)$ y un vector director es $\vec{u} = (3, -1, 2)$. De las ecuaciones de s , un punto es $S = (1, 0, 0)$ y un vector director es $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

a) Recta por P paralela a r

Las rectas paralelas tienen vectores directores proporcionales. Conservamos $\vec{u} = (3, -1, 2)$ y usamos como punto $P = (0, 3, -2)$:

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 3 - t, \\ z = -2 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Plano que contiene a r y es paralelo a s

El plano debe contener los dos vectores directores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ y $\vec{v} = (1, -1, 0)$. Un vector normal se obtiene con el producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, -2).$$

Podemos simplificarlo a $\vec{n} = (1, 1, -1)$. El plano pasa por $R = (-1, 1, 0)$. Usamos la ecuación general $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$ y sustituimos el punto:

$$x + y - z + d = 0, \quad -1 + 1 - 0 + d = 0 \implies d = 0.$$

Conclusión: el plano en forma general es

$$\boxed{x + y - z = 0}.$$

c) Distancia entre r y s

Comprobamos primero su posición relativa. Los directores no son proporcionales; por ejemplo, sus primeras dos componentes darían $3/1 \neq (-1)/(-1)$. Además,

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, 2, -2) \neq \vec{0}.$$

Tomamos $\overrightarrow{RS} = S - R = (2, -1, 0)$. El producto mixto es

$$\overrightarrow{RS} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (2, -1, 0) \cdot (2, 2, -2) = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

Esto demuestra que las dos direcciones no son coplanares con el segmento que une los puntos: las rectas son alabeadas y no se cortan.

La distancia entre dos rectas alabeadas se calcula con la fórmula $d(r, s) = \frac{|\vec{RS} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$.

Sustituimos los valores:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3}, \quad d(r, s) = \frac{|2|}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Conclusión: la distancia es

$$d(r, s) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades de longitud.}$$

A.3. Función, asíntotas, monotonía e integral

La función es

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

a) Dominio y asíntotas

El denominador debe ser distinto de cero. Resolvemos:

$$(x+1)^2 = 0 \iff x = -1.$$

Por tanto, $x = -1$ queda excluido y

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Asíntota vertical. El único punto excluido del dominio es $x = -1$. Como el denominador es un cuadrado, se acerca a cero por valores positivos desde ambos lados; el numerador se acerca a -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty.$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales. Para $x \rightarrow \pm\infty$, dividimos numerador y denominador por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1/x}{(1+1/x)^2} = 0.$$

La asíntota horizontal en ambos extremos es $y = 0$.

Asíntotas oblicuas. La pendiente candidata sería

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0.$$

Al ser $m = 0$, no puede haber una asíntota oblicua: el límite correspondiente es la horizontal $y = 0$, ya encontrada. Por tanto, no existe asíntota oblicua.

b) Crecimiento, decrecimiento y extremos

Derivamos con la regla del cociente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)^2 \cdot 1 - x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1)((x+1) - 2x)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{1-x}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Los puntos que separan los intervalos son los ceros de la derivada y los puntos fuera del dominio:

$$1-x=0 \implies x=1, \quad (x+1)^3=0 \implies x=-1 \text{ (fuera del dominio).}$$

Comprobamos el signo de f' con un valor de prueba en cada intervalo:

$$f'(-2) = \frac{3}{(-1)^3} = -3 < 0, \quad f'(0) = 1 > 0, \quad f'(2) = \frac{-1}{27} < 0.$$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	no existe	$+$	0	$-$
f	decrece	no pertenece al dominio	crece	máximo	decrece

En $x = -1$ no hay máximo ni mínimo porque la función no está definida allí; solo separa dos intervalos del dominio. En $x = 1$, el signo pasa de $+$ a $-$, así que hay un máximo relativo:

$$f(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Conclusión: f decrece en $(-\infty, -1)$, crece en $(-1, 1)$ y vuelve a decrecer en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $(1, \frac{1}{4})$ y no tiene mínimo relativo.

c) Cálculo de la integral

Calculamos la primitiva haciendo el cambio $u = x + 1$. Entonces $x = u - 1$ y $du = dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{u-1}{u^2} du \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du \\ &= \ln|u| + \frac{1}{u} + C \\ &= \boxed{\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C}. \end{aligned}$$

Opción B

B.1. Determinantes y potencias de matrices

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Valores de x para los que B tiene inversa

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Desarrollamos $\det B$ por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det B &= x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3x + 0 + 1 \\ &= 1 - 3x. \end{aligned}$$

Imponemos la condición de invertibilidad:

$$1 - 3x \neq 0 \implies x \neq \frac{1}{3}.$$

Conclusión: B es invertible para

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

b) Determinantes de A^3 y de la segunda matriz

Para cualquier matriz cuadrada, $\det(A^3) = (\det A)^3$. Como el enunciado da $\det A = 8$:

$$\det(A^3) = 8^3 = 512.$$

La otra matriz es

$$C = \begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comparando columnas, la primera columna de C es dos veces la primera columna de A ; la segunda es cinco veces la segunda columna de A ; la tercera no cambia. Por tanto,

$$C = A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de un producto es el producto de los determinantes, de modo que

$$\det C = \det A \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 8 \cdot 10 = 80.$$

Conclusión: los determinantes pedidos son $\det(A^3) = 512$ y $\det C = 80$.

c) Valores de x, y, z a partir de A^2

Calculamos la potencia solicitada multiplicando A por A :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 + y - z & x + 1 & 3 - x \\ xy + 2y + 3z & y + 7 & -y + 6 \\ xz + y & z + 2 & 3 - z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El enunciado pide que esta matriz sea

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Igualamos las entradas que dan ecuaciones directas:

$$x + 1 = 0 \implies x = -1, \quad y + 7 = 7 \implies y = 0, \quad z + 2 = 3 \implies z = 1.$$

Comprobamos todas las entradas con estos valores:

$$\begin{array}{lll} x^2 + y - z = (-1)^2 + 0 - 1 = 0, & x + 1 = -1 + 1 = 0, & 3 - x = 3 - (-1) = 4, \\ xy + 2y + 3z = (-1)0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3, & y + 7 = 7, & -y + 6 = 6, \\ xz + y = (-1)1 + 0 = -1, & z + 2 = 3, & 3 - z = 2. \end{array}$$

Todas coinciden con la matriz dada.

Conclusión: los valores que cumplen la igualdad matricial son $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

B.2. Posición de rectas y planos

La recta r está dada como intersección de dos planos:

$$r : \begin{cases} 2x - y + 5 = 0, \\ 6x - z + 8 = 0, \end{cases}$$

y s está dada paramétricamente:

$$s : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha, \\ y = 2 + \alpha, \\ z = 3 - \alpha, \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para expresar r en forma paramétrica, tomamos $x = t$. Despejamos y y z :

$$2t - y + 5 = 0 \implies y = 2t + 5, \quad 6t - z + 8 = 0 \implies z = 6t + 8.$$

Por tanto,

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = 8 + 6t, \end{cases} t \in \mathbb{R},$$

con punto $R = (0, 5, 8)$ y vector director $\vec{u} = (1, 2, 6)$. La recta s tiene punto $S = (1, 2, 3)$ y vector director $\vec{v} = (-2, 1, -1)$.

a) Posición relativa y punto común

Los vectores directores no son proporcionales, pues sus primeras componentes exigirían un factor -2 , pero sus segundas componentes no cumplen $2(-2) = 1$. Por tanto, las rectas no son paralelas.

Para comprobar si se cortan, igualamos sus coordenadas:

$$\begin{cases} t = 1 - 2\alpha, \\ 5 + 2t = 2 + \alpha, \\ 8 + 6t = 3 - \alpha. \end{cases}$$

Sustituimos $t = 1 - 2\alpha$ en la segunda ecuación:

$$5 + 2(1 - 2\alpha) = 2 + \alpha \implies 7 - 4\alpha = 2 + \alpha \implies \alpha = 1.$$

Entonces $t = 1 - 2 = -1$. Verificamos la tercera coordenada:

$$8 + 6(-1) = 2 = 3 - 1.$$

Las tres coordenadas coinciden. En r , para $t = -1$:

$$(x, y, z) = (-1, 5 - 2, 8 - 6) = (-1, 3, 2).$$

Conclusión: las rectas son secantes y su único punto común es

$$\boxed{(-1, 3, 2)}.$$

b) Valor de m para que s sea paralela al plano

El plano $\pi : 2x + mz + 1 = 0$ tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (2, 0, m)$. Para que la recta sea paralela al plano, su vector director debe ser perpendicular al normal:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \implies (-2, 1, -1) \cdot (2, 0, m) = 0.$$

Sustituimos y resolvemos:

$$-4 - m = 0 \implies m = -4.$$

Además, la recta no está contenida en ese plano: el punto $S = (1, 2, 3)$ da $2(1) - 4(3) + 1 = -9 \neq 0$. Por eso, para este valor de m , la recta es estrictamente paralela al plano.

Conclusión: el valor buscado es $m = -4$.

c) Plano que contiene a s y a $P = (1, 2, 4)$

Tomamos el punto $S = (1, 2, 3)$ de s . Dos direcciones del plano son el vector director de s , $\vec{v} = (-2, 1, -1)$, y el vector desde S hasta P :

$$\overrightarrow{SP} = P - S = (1 - 1, 2 - 2, 4 - 3) = (0, 0, 1).$$

Un vector normal al plano es

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{SP} = (-2, 1, -1) \times (0, 0, 1) = (1, 2, 0).$$

Usamos la ecuación general del plano que pasa por $S = (1, 2, 3)$:

$$1(x - 1) + 2(y - 2) + 0(z - 3) = 0.$$

Desarrollando:

$$x - 1 + 2y - 4 = 0 \implies x + 2y - 5 = 0.$$

Conclusión: el plano en forma general es

$$x + 2y - 5 = 0.$$

B.3. Minimización del coste del depósito

Sea x la longitud, en metros, de un lado de la base cuadrada, y sea h la altura, también en metros. Como son longitudes, $x > 0$ y $h > 0$.

a) Coste en función de x

El volumen de la caja abierta es el área de la base por la altura:

$$V = x^2 h.$$

La capacidad debe ser 1500 m^3 , así que

$$x^2 h = 1500 \implies h = \frac{1500}{x^2}.$$

El coste de la base es su área multiplicada por 15 €/m^2 :

$$C_{\text{base}} = 15x^2 \text{ €}.$$

Hay cuatro paredes, cada una de área xh . Su área total es $4xh$, y el coste correspondiente es

$$C_{\text{paredes}} = 5 \frac{\text{€}}{\text{m}^2} \cdot 4xh \text{ m}^2 = 20xh \text{ €}.$$

Sumamos ambos costes y sustituimos $h = 1500/x^2$:

$$\begin{aligned} C(x) &= 15x^2 + 20x \left(\frac{1500}{x^2} \right) \\ &= 15x^2 + \frac{30000}{x}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Conclusión: el coste total es

$$C(x) = 15x^2 + \frac{30000}{x} \text{ euros, } x > 0.$$

b) Dimensiones que minimizan el coste

Derivamos cada término:

$$C'(x) = 30x - \frac{30000}{x^2}.$$

Buscamos los puntos críticos dentro del dominio $x > 0$:

$$\begin{aligned}C'(x) = 0 &\Rightarrow 30x - \frac{30000}{x^2} = 0 \\&\Rightarrow 30x^3 - 30000 = 0 \\&\Rightarrow x^3 = 1000 \\&\Rightarrow x = 10 \text{ m.}\end{aligned}$$

Para comprobar el tipo de extremo, probamos un valor menor y otro mayor que 10:

$$C'(5) = 30(5) - \frac{30000}{5^2} = 150 - 1200 = -1050 < 0,$$

$$C'(20) = 30(20) - \frac{30000}{20^2} = 600 - 75 = 525 > 0.$$

x	$(0, 10)$	10	$(10, +\infty)$
$C'(x)$	$-$	0	$+$
$C(x)$	decrece	mínimo	crece

El coste decrece antes de $x = 10$ y crece después. También tiende a infinito cuando $x \rightarrow 0^+$ y cuando $x \rightarrow +\infty$; por ello, este mínimo es absoluto.

Calculamos la altura con la condición de volumen:

$$h = \frac{1500}{10^2} = \frac{1500}{100} = 15 \text{ m.}$$

Conclusión: el coste se minimiza cuando el lado de la base mide **10 m** y la altura **15 m**.

c) Coste mínimo

Sustituimos $x = 10$ en la función de coste:

$$C(10) = 15(10)^2 + \frac{30000}{10} = 1500 + 3000 = 4500 \text{ €}.$$

Conclusión: el coste mínimo del depósito es

4500 euros.