

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

El denominador $x \sin x$ se anula en orden dos cuando $x \rightarrow 0$, pues $\sin x \sim x$. Para que el cociente tenga límite finito, el numerador también debe tener anuladas sus derivadas de orden cero y uno en ese punto. Si

$$N(x) = \cos(3x) - e^x + ax,$$

entonces $N(0) = 0$ y

$$N'(x) = -3 \sin(3x) - e^x + a, \quad N'(0) = a - 1.$$

Por tanto, la condición de finitud exige $a = 1$. Con este valor, aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital, ya que numerador y denominador, junto con sus primeras derivadas, se anulan en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{N(x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cos(3x) - e^x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{-9 - 1}{2} = -5.$$

Así, $a = 1$ y el límite pedido vale -5 .

Opción A - Ejercicio 2

Factorizamos el denominador para poder descomponer la función racional en fracciones simples. En el intervalo de integración no hay singularidades, pues las raíces del denominador son 2 y -1 :

$$2x^2 - 2x - 4 = 2(x - 2)(x + 1).$$

La división y la descomposición quedan

$$\frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} = \frac{1}{2} + \frac{x + 2}{2(x - 2)(x + 1)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3(x - 2)} - \frac{1}{6(x + 1)}.$$

Integramos término a término y evaluamos entre 0 y 1:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx &= \left[\frac{x}{2} + \frac{2}{3} \ln |x - 2| - \frac{1}{6} \ln |x + 1| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6} \ln 2 = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \ln 2}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

Al ser un sistema homogéneo cuadrado, tiene solución única si y solo si el determinante de su matriz de coeficientes es distinto de cero. Calculamos

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{pmatrix}, \quad \det A_m = 3m(m+2).$$

Por tanto, el sistema tiene únicamente la solución nula cuando $m \neq 0, -2$. Para que exista alguna solución distinta de la nula, el determinante debe anularse; esto ocurre para $m = 0$ o $m = -2$.

Para $m = -2$, las ecuaciones son

$$x - y - 2z = 0, \quad -2x + 2y + z = 0, \quad -x + y - 4z = 0.$$

De la primera, $x - y = 2z$. Al sustituir en la segunda, $-3z = 0$, así que $z = 0$ y $x = y$. La tercera ecuación queda entonces satisfecha. En consecuencia, las soluciones son

$$(x, y, z) = (t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

El vector director de r es $(2, 1, 0)$. El vector que une los puntos dados es

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - 1, -1 - 1, -2 - 2) = (0, -2, -4),$$

que podemos tomar como $(0, 1, 2)$ al cambiarlo por un múltiplo no nulo. Un vector normal al plano buscado se obtiene mediante el producto vectorial de estos dos vectores, ya que así resulta perpendicular a ambos:

$$(2, 1, 0) \times (0, 1, 2) = (2, -4, 2) \sim (1, -2, 1).$$

El punto $(1, 0, 1)$ pertenece a r . Usando el normal $(1, -2, 1)$ y ese punto, la ecuación general del plano es

$$(x - 1) - 2y + (z - 1) = 0 \implies x - 2y + z - 2 = 0.$$

Para hallar el punto de r equidistante de A y B , parametrizamos la recta como $P(t) = (1 + 2t, t, 1)$. Los puntos equidistantes de A y B pertenecen al plano mediador, perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio $M = (1, 0, 0)$. Por ello imponemos

$$(P(t) - M) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \implies (2t, t, 1) \cdot (0, -2, -4) = -2t - 4 = 0.$$

De aquí $t = -2$ y el punto pedido es

$$P = (-3, -2, 1).$$

Opción B - Ejercicio 1

Sea $x > 0$ el número. Queremos minimizar $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Su dominio es $(0, \infty)$ y, además, $f(x) \rightarrow +\infty$ tanto cuando $x \rightarrow 0^+$ como cuando $x \rightarrow +\infty$. Buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \implies x^2 = 1.$$

Como x debe ser positivo, la única solución es $x = 1$. La derivada segunda $f''(x) = 2/x^3$ es positiva para todo $x > 0$, de modo que en $x = 1$ se alcanza el mínimo absoluto. La suma mínima es

$$f(1) = 1 + 1 = \boxed{2},$$

y se obtiene para el número $\boxed{x = 1}$.

Opción B - Ejercicio 2

Usamos integración por partes, tomando $u = x$ y $dv = \sec^2 x \, dx$, de forma que $du = dx$ y $v = \tan x$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx &= [x \tan x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - [-\ln |\cos x|]_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

Usamos que, para una matriz cuadrada de orden 3, multiplicar toda la matriz por 3 multiplica su determinante por 3^3 , y que el determinante de una inversa es el inverso del determinante:

$$\boxed{\det(3A) = 3^3 \det A = 54}, \quad \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{2}}.$$

Para el determinante del apartado c), desarrollamos por la primera fila. Además, desarrollamos $\det A$ por su primera fila para obtener la relación entre x, y, z :

$$\det A = -2x - 2y + 2z = 2 \implies x + y - z = -1.$$

Así,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 18y - 12z + 12x - 6y = 12(x + y - z) = \boxed{-12}.$$

En el apartado d), restar dos veces la primera fila a la segunda no cambia el determinante. Después, las filas resultantes son la tercera, la primera y la opuesta a la segunda fila de A . La permutación cíclica de las filas conserva el determinante, mientras que cambiar el signo de una fila lo cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\det A = \boxed{-2}.$$

Opción B - Ejercicio 4

El vector director de r se obtiene restando las coordenadas de sus puntos:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2 - 1, -1 - 0, 3 - (-1)) = (1, -1, 4).$$

La distancia del origen O a una recta que pasa por A y tiene vector director $\vec{v}$ es

$$d(O, r) = \frac{\|\overrightarrow{OA} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Aquí, $\overrightarrow{OA} = (1, 0, -1)$ y

$$\overrightarrow{OA} \times \vec{v} = (-1, -5, -1), \quad d(O, r) = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{18}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}.$$

Para la perpendicular por el origen, buscamos el pie $H = A + t\vec{v}$ de la perpendicular desde O a r . La condición $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{v} = 0$ expresa que OH es perpendicular a r :

$$H = (1 + t, -t, -1 + 4t), \quad H \cdot \vec{v} = 18t - 3 = 0 \implies t = \frac{1}{6}.$$

Por tanto, $H = (\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$ y un vector director de la recta buscada es $(7, -1, -2)$. En forma paramétrica,

$$\boxed{\begin{cases} x = 7s, \\ y = -s, \\ z = -2s, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$